

опорных и узловых точек, являлся объем памяти используемой ЭВМ. Результаты, представленные на рис. 1, свидетельствуют, что с увеличением числа узловых точек n точность моделирования повышается. Однако при достижении некоторого достаточно большого числа (в нашем эксперименте $n \geq 60$) дальнейшего существенного повышения точности не наблюдается.

Как видно из рис. 2, увеличение числа m опорных точек, т. е. использования дополнительной информации для определения неизвестных коэффициентов C_j , существенно не влияет на точность моделирования, хотя точность и имеет некоторую тенденцию к повышению при увеличении m . Поэтому, чтобы найти параметры C_j ($j=1, 2, \dots, n$) мультиквадриковых функций, на наш взгляд, достаточно решить систему линейных уравнений (5) при условии равенства числа опорных и узловых точек, что в дальнейшем незначительно скажется на результатах моделирования.

Выполненные исследования по применению мультиквадрикового метода моделирования нерегулярных поверхностей (в частности, использование функции вида (5)) позволяют сделать вывод о том, что данная методика успешно может быть использована для аппроксимации любого физического поля независимо от его природы, сложности, размеров. Точность аппроксимации обуславливается числом узловых точек, т. е. количеством коэффициентов мультиквадриковых функций, и почти не зависит от числа опорных точек.

Список литературы: 1. Шульман М. В., Мительман Е. Я. Мультиквадриковый метод аппроксимации топографической поверхности. — Геодезия и картография, 1974, № 2. 2. Шульман М. В., Мительман Е. Я. Цифровые модели и их использование при съемке рельефа суши и дна акваторий континентального шельфа. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978, № 4. 3. Göpfert W. Interpolationsergebnisse mit der Multiquadratischen Methode. — Vermessungs, 1977, v. 102, № 10. 4. Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other surfaces. — J. Geophys. Res. 1971, v. 76. 5. Hardy R. L. Research resulting in the application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems. — Surveying and Mapping, 1975, v. 35, № 4. 6. Hardy R. L. Least square prediction. — Photogram. Eng. and Remote Sens., 1977, v. 43, № 4. 7. Schut G. H. Review of interpolation methods for digital terrain models. — Can. Surv. 1976, v. 30, № 5.

Статья поступила 1 апреля 1980 г.

УДК 528.236

В. Г. КИРИЛЛОВ

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вопросы преобразования пространственных прямоугольных координат актуальны не только в пространственной геодезии [9], но и в аналитической фотограмметрии [7, 8, 10—12].

34

К. Риннер отметил [9], что в круг основных задач пространственной геодезии входят: определение положения пункта при помощи направлений, углов и расстояний в пространстве: ориентирование пучка лучей и линейное конформное преобразование в пространстве хода

$$\begin{bmatrix} X^1 \\ Y^1 \\ Z^1 \end{bmatrix} = m \cdot A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где m — масштабный множитель;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ — матрица вращения.}$$

Матрица A должна быть ортогональной, т. е. удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1; & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0; \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0; \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1; & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Определение параметров преобразования называют «проблемой абсолютного ориентирования» [12, 14] или «проблемой вращений и сдвига» [10]. Ф. Сансо [10] сформулировал ее так: «В двух декартовых трехмерных системах R и S с двумя различными ортами вычислены или измерены координаты определенного числа общих для этих систем пунктов. Необходимо найти масштабный множитель m , вектор сдвига $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$ и матрицу вращения A , которые переводят векторы системы R в векторы системы S согласно уравнения (1)». Под «проблемой абсолютного ориентирования» понимают задачу перехода от фотограмметрических координат маршрута или блока к геоцентрическим.

Масштаб m и сдвиги $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0$ определить не сложно, но вычисление элементов a_{ij} матрицы осложнено связывающими эти элементы условиями ортогональности (2).

Известно несколько методов получения элементов ортогональной матрицы преобразования координат [8—11], которые можно подразделить на две группы:

а) вычисление элементов a_{ij} ортогональной матрицы заданной структуры (например, «матрицы Родрига»). Решение выполняется по замкнутым формулам [9, 11—13] или итерационно [10];

б) вычисление элементов a_{ij} ортогональной матрицы неизвестной структуры. Решение — итерационное [7, 8].

Методы первой группы основаны на теореме 8.4.9 из работы [5], согласно которой любую ортогональную матрицу A можно

3*

35

представить посредством двух матриц: единичной I и кососимметрической S :

$$A = (I - S)^{-1}(I + S), \quad (3)$$

$$\text{где } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } S = \begin{bmatrix} 0 & -c & +b \\ +c & 0 & -a \\ -b & +a & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь a, b, c — элементы кососимметрической матрицы. После подстановки I и S из формулы (4) в (3) и умножения получают матрицу

$$A = \frac{1}{1 + a^2 + b^2 + c^2} \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2c & 2ac + 2b \\ 2ab + 2c & 1 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2a \\ 2ac - 2b & 2bc + 2a & 1 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

которую называют «матрицей Родрига» [10] или «родриговой формой матрицы» [8]. В дальнейшем назовем матрицы типа (5) матрицами Родрига.

Г. Схут [12] усилил теорему (3), записав

$$A = (dI - S)^{-1}(dI + S), \quad (6)$$

где d — постоянный множитель.

В этом случае матрица A примет вид

$$A = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - cd & 2ac + 2bd \\ 2ab + 2cd & d^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2ad \\ 2ac - 2bd & 2bc + 2ad & d^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Эта матрица ортогональна, если $|d^2 + a^2 + b^2 + c^2| = 1$.

Г. Схут [11] применил кватернионное уравнение

$$S^1 = qSq^{-1}, \quad (8)$$

где S^1 — новый вектор $(X^1i + Y^1j + Z^1k)^*$; S — старый вектор $(Xi + Yj + Zk)$; q — кватернион вида $(d + ai + bj + ck)$; q^{-1} — сопряженный кватернион вида $(d - ai - bj - ck)$.

После умножения в уравнении (8) и расщепления его на действительную и мнимые части получают ортогональную матрицу, идентичную (7), называемую также матрицей Родрига [10].

Отметим, что матрица Родрига — не единственная форма записи ортогональной матрицы. Если в уравнении (8) все три кватерниона мнимые**, то матрица преобразования, получен-

* Здесь i, j, k — мнимые базисные единицы. Умножение кватернионов производится в соответствии с правилами [3]: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k$; $ji = -k$; $ik = -j$; $ki = j$; $jk = i$; $kj = -i$.

** Мнимыми называют кватернионы вида $(ai + bj + ck)$, не содержащие вещественной части [3].

ная нами после их перемножения и приведения подобных по мнимым единицам, будет иметь вид

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Она будет не только ортогональной, но и симметричной.

Для вычисления параметров a, b и c матрицы (5) и a, b, c и d матрицы (7) разработаны различные способы [9, 10, 12]. Так, К. Риннер [9] предложил несколько методов вычисления параметров ортогональной матрицы преобразования, из которых наиболее интересен способ разложения матрицы. Подставляя формулу (3) в (1), он получил

$$\begin{bmatrix} \Delta X'_i \\ \Delta Y'_i \\ \Delta Z'_i \end{bmatrix} = (I - S)^{-1}(I + S) \begin{bmatrix} m \Delta X_i \\ m \Delta Y_i \\ m \Delta Z_i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\Delta X'_i, \Delta Y'_i, \Delta Z'_i, \Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$ — разности координат i -го и 1-го пункта. Можно (по В. Струве) находить средние приращения, а затем, вычитая из уравнения i -го пункта уравнение, в котором коэффициентами являются средние приращения, получать редуцированные уравнения приращений.

Умножая (10) на $(I - S)$ слева, К. Риннер составил уравнение

$$(I - S) \begin{bmatrix} \Delta X'_i \\ \Delta Y'_i \\ \Delta Z'_i \end{bmatrix} - (I + S) \begin{bmatrix} m \Delta X_i \\ m \Delta Y_i \\ m \Delta Z_i \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

После подстановки формул (4) в (11), умножения и приведения подобных К. Риннер получил три группы уравнений ($i = 1, 2$):

$$\left. \begin{aligned} -b(\Delta Z'_i + m \Delta Z_i) + c(\Delta Y'_i + m \Delta Y_i) + (\Delta X'_i - m \Delta X_i) &= 0; \\ a(\Delta Z'_i + m \Delta Z_i) - c(\Delta X'_i + m \Delta X_i) + (\Delta Y'_i - m \Delta Y_i) &= 0; \\ -a(\Delta Y'_i + m \Delta Y_i) + b(\Delta X'_i + m \Delta X_i) + (\Delta Z'_i - m \Delta Z_i) &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

Чтобы определить параметры b и c , он использовал два уравнения первой группы, а из двух уравнений второй группы находил a и c . Повторное вычисление c является контрольным.

Этот способ дает хорошие результаты, если ошибки координат незначительны. Но, как следует из уравнивания мировой космической сети, погрешности определения координат пунктов составляют пока в среднем ± 10 м [6]. Уменьшить их влияние можно, определяя параметры a, b и c по способу наименьших квадратов. Составленная нами для ЭВМ «МИР-2» программа позволяет реализовать такое решение.

Г. Схут [12] предложил находить параметры (7) с помощью алгебры кватернионов. Из выражения (8) он образовал равенство

$$Sq = rq \quad (13)$$

и после умножения, а также расщепления его на действительную и мнимые части получил четыре уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (X' - X)d + (Y' + Y)c + (Z' + Z) \cdot b = 0; & (X' + X)b - \\ & - (Y' + Y)a + (Z' - Z) \cdot d = 0; \\ -(X' + X) \cdot c + (Y' - Y) \cdot d + (Z' + Z) \cdot a = 0; & (X' - X)a + \\ & + (Y' - Y) \cdot b + (Z' - Z) \cdot c = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Однако четвертое уравнение зависит от трех первых. Вычисление параметров a , b , c и d из трех уравнений возможно, если известны в двух системах старые и новые координаты X , Y , Z одного пункта и одна из координат другого пункта, например Z .

Ф. Сансо [10] также применил для вычисления параметров матрицы (7) алгебру кватернионов, но его способ более трудоемкий. Он исходил из формулы

$$S_1 = \rho q r q^{-1} + b, \quad (15)$$

где в отличие от (8) введены масштабный множитель ρ и вектор сдвига b . После ряда преобразований он составил уравнение

$$\varepsilon S_i q r_i + (\rho \varepsilon |r_i|^2) q = 0. \quad (16)$$

Затем из (16) он получил матричное выражение

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n} \varepsilon r_i^k S_i^k - \frac{1}{n} \varepsilon (r_1^2 S_i^3 - r_i^3 S_i^2) - \frac{1}{n} \varepsilon (r_i^3 S_i^1 - r_1^1 S_i^3) \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{n} \varepsilon (r_1^1 S_i^2 - r_2^2 S_i^1) \\ & \frac{1}{n} \varepsilon r_i^k S_i^k - \frac{2}{n} \varepsilon S_i^1 r_1^1 - \frac{1}{n} \varepsilon (r_i^2 S_i^1 + r_1^1 S_i^2) - \\ & \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{n} \varepsilon (r_i^3 S_i^1 + r_1^1 S_i^3) \\ & \frac{1}{n} \varepsilon r_i^k S_i^k - \frac{2}{n} \varepsilon r_i^2 S_i^2 - \frac{1}{n} \varepsilon (r_i^3 S_i^2 + r_1^2 S_i^3) \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{n} \varepsilon r_i^k S_i^k - \frac{2}{n} \varepsilon r_i^3 S_i^3 \end{aligned} \left| \begin{array}{c} d \\ d \\ a \\ a \\ b \\ b \\ c \\ c \end{array} \right. = \lambda \left| \begin{array}{c} d \\ d \\ a \\ a \\ b \\ b \\ c \\ c \end{array} \right. \quad (17)$$

где a , b , c и d — компоненты кватерниона $q = d + ai + bj + ck$; $r_1^1 = \Delta X_i$; $r_1^2 = \Delta Y_i$; $r_1^3 = \Delta Z_i$; $S_i^1 = \Delta X_i^1$; $S_i^2 = \Delta Y_i^1$; $S_i^3 = \Delta Z_i^1$; верхний индекс k означает, что суммирование ведется от 1 до 3, а λ — собственное значение матрицы.

В выражении (17) неизвестные λ и q определяют методом приближений. Затем параметры a , b , c , d подставляют в формулу (7) и вычисляют элементы ортогональной матрицы. Как видим, способ Ф. Сансо сложнее, чем способ Г. Схута.

Отметим, что в уравнении (17) треугольную матрицу нельзя получить из формулы (16). Определенная нами из уравнения (16) матрица не является треугольной, и в нее входят члены ρ и $(r_i^k)^2$.

В работе [9] предложен метод нахождения элементов матрицы с помощью векторной алгебры. Чтобы его применить, нужно знать в старой и новой системах координаты X , Y , Z двух пунктов, а для третьего — только одну координату, например Z . Из решения получают две ортогональные матрицы, причем неизвестно, какая из них истинная, хотя число исходных данных достаточно для получения единственно правильного решения. Поэтому классифицировать его как метод определения ортогональной матрицы преобразования, конечно, нельзя.

Определитель Δ матрицы (7) равен $(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)$. Если преобразование — несобственное вращение, т. е. его определитель равен -1 , то $d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = -1$. Следовательно, при этом параметры a , b , c и d будут мнимыми, так как обычно они меньше 1.

Однако некоторые ЭВМ, например «Мир-2», могут работать только с действительными числами, что усложняет программирование таких задач. Подобные трудности не возникают в итерационных способах, когда при вычислении ортогональных матриц применение быстродействующих ЭВМ позволяет широко использовать метод итераций.

Итерационный способ расчета элементов ортогональной матрицы преобразования предложили Г. Осваль и С. Баласубрамания [7]. Позднее Г. Осваль [8] усовершенствовал этот метод, определив из условий ортогональности (2) показатели неортогональности v_i матрицы преобразования:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 - 1 &= v_1; \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 - 1 &= v_2; \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 - 1 &= v_3; \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} &= v_4; \\ a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + a_{31} a_{33} &= v_5; \\ a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} &= v_6. \end{aligned} \quad (18)$$

Затем находил поправки в элементы матрицы A

$$dA_i = -1/2v_i \cdot A, \quad (19)$$

$$\text{где } v_i = \begin{pmatrix} v_1 & v_4 & v_5 \\ v_4 & v_2 & v_6 \\ v_5 & v_6 & v_3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

и улучшенные параметры матрицы

$$A_{i+1} = A_i + dA_i. \quad (21)$$

Вычисления следует повторять до тех пор, пока матрица A_{i+1} не будет ортогональной (в пределах заданной точности).

Г. Осваль и С. Баласубрамаян [7, 8] не приводят доказательства сходимости итераций для своего метода. Выполненное нами доказательство свидетельствует, что основное изменение элементов неортогональной матрицы происходит в первом итерационном цикле, тогда как в последующих только незначительно корректируются элементы матрицы, вычисленные в первом. Результаты вычислений подтверждают теоретические выкладки (табл. 1)*.

Как подтверждают расчеты, для получения ортогональной матрицы достаточно двух-трех приближений. Исходные элементы мы определяли из решения матричного уравнения

$$\Delta R' = m \cdot A \cdot \Delta R, \quad (22)$$

где m — масштаб; A — матрица преобразования с элементами a_{ij} :

$$\Delta R' = \begin{bmatrix} X_2' - X_1' & X_3' - X_1' & X_4' - X_1' \\ Y_2' - Y_1' & Y_3' - Y_1' & Y_4' - Y_1' \\ Z_2' - Z_1' & Z_3' - Z_1' & Z_4' - Z_1' \end{bmatrix} - \text{матрица приращений координат (по линиям } i-1) \text{ в новой системе;}$$

$$\Delta R = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 & X_3 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 & Y_3 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_3 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{bmatrix} - \text{матрица приращений координат (по линиям } i-1) \text{ в старой системе.}$$

Если определитель матрицы ΔR не равен нулю, то

$$A = 1/m \Delta R^{-1} \cdot \Delta R', \quad (23)$$

где ΔR^{-1} — матрица, обратная к ΔR .

* Исходные данные для вычислений взяты из работы [4], пункты 9028, 9091, 9426, 9431.

Исходные элементы a_{ij} вычисляли по формуле (23). Затем по методу Осваля—Баласубрамаяна выполняли ортогонализацию матрицы. Для анализа погрешностей определяли приращения $\Delta X_{i1}'$, $\Delta Y_{i1}'$, $\Delta Z_{i1}'$ с помощью полученных элементов ортогональной матрицы. Разности между этими и заданными приращениями ΔX_{i1} , ΔY_{i1} , ΔZ_{i1} иногда достигали нескольких сантиметров (табл. 2)*.

Таблица 2
Расхождения между вычисленными и заданными приращениями, см

Линия	$\Delta X_{i1}'' - \Delta X_{i1}'$	$\Delta Y_{i1}'' - \Delta Y_{i1}'$	$\Delta Z_{i1}'' - \Delta Z_{i1}'$
S_{21}	-0,2	-5,0	+0,6
S_{31}	0,0	-3,1	+0,5
S_{41}	+0,2	-1,7	+0,3

Как видим из табл. 2, получение элементов ортогональной матрицы преобразования здесь «оторвано» от исходных координат, поэтому возможны значительные расхождения между преобразованными и исходными координатами, что является основным недостатком данного метода. Итерационный метод, позволяющий при минимальных расхождениях между исход-

Таблица 3
Расхождения между преобразованными и исходными координатами, м

Пункт	Приближения								
	I			II			III		
	δX	δY	δZ	δX	δY	δZ	δX	δY	δZ
3106	-2,13	-1,85	+7,02	+0,53	-3,22	+2,63	+0,51	-3,22	+2,62
3334	+5,95	+10,07	-8,31	-2,37	+7,93	-9,22	-2,40	+7,90	-9,20
3400	-10,61	-6,81	+6,95	+0,67	-6,61	+6,44	+0,70	-6,60	+6,39
3401	+6,80	-1,42	-5,66	+1,18	+1,90	+0,16	+1,19	+1,92	+0,19
Ср. кв. расх.	±6,78			±4,67			±4,66		

ными и преобразованными с помощью этой матрицы координатами ортогонализировать матрицу, в настоящее время не разработан.

К. Риннер [9] по аналогии со способом Ривави предложил для уменьшения расхождений между трансформированными и заданными координатами на исходных пунктах пользоваться методом вторичного уравнения преобразованных координат. Это

* Исходные данные взяты из работы [9, с. 386].

решение он выполнял способом наименьших квадратов, отмечая, что подобные вычисления производятся до тех пор, пока расхождения в масштабе и элементах матрицы между двумя последующими циклами не станут относительно малыми.

Такие вычисления по вторичному уравниванию нами выполнены. Для этого использовали программу преобразования квазигеоцентрических систем и находили матрицу A , умноженную на масштаб. Применялся способ, изложенный в работе [1]. Анализ вычислений показал, что расхождения между преобразованными и исходными координатами уменьшаются в 1,5—2 раза, но после двух-трех приближений стабилизируются (табл. 3).

Следовательно, параметры a , b , c и d матрицы Родрига из-за наличия ошибок координат необходимо определять по способу наименьших квадратов. Матрица (9) — ортогональна, поэтому можно находить параметры a , b , c и для нее. Вторичное уравнивание уменьшает расхождения между заданными и преобразованными координатами на исходных пунктах. Метод Осваль—Баласубрамаяна позволяет быстро ортогонализировать матрицу, но расхождения между исходными и преобразованными с помощью такой матрицы координатами могут быть значительными.

Список литературы: 1. Буткевич А. В., Кириллов В. Г. К вопросу о конформности преобразований прямоугольных координат в пространстве. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 2. Кириллов В. Г. К вопросу о преобразовании ортогональных систем координат в спутниковой геодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 3. Hamilton W. R. Elements on quaternions. — London, 1866. 4. March J. C., Douglas B. C., Klosko S. M. The relation of the European Datum to a geocentric reference system. — Bulletin géodésique, 1972, 106. 5. Mirsky L. An introduction to linear algebra. — Oxford: Clarendon Press, 1955. 6. Mueller I. I. Global satellite triangulation and trilateration results. — Journal of geophysical research, 1974, 79, № 35. 7. Oswal H. L., Balasubramanian S. An exact solution of absolute orientation. — Photogrammetric Engineering, 1968, 34, № 10. 8. Oswal H. L. A new method of constructing of orthogonal matrix. — Photogrammetric Record, 1971, № 37. 9. Rinner K. Die räumliche Drehstreckung. — Acta technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1965, 52, № 3—4. 10. Sanso F. An exact solution of the roto-translation problem. — Photogrammetria, 1973, 29, № 6. 11. Schut G. H. Construction of orthogonal matrices and their application in analytical photogrammetry. — Photogrammetria, 1958—1959, 15, № 4. 12. Schut G. H. On exact linear equation for the computation of the rotational elements of absolute orientation. — Photogrammetria, 1960—1961, 17, № 1. 13. Thompson E. H. A method for the construction of orthogonal matrices. — Photogrammetric Record, 1959, 3, № 13. 14. Thompson E. H. An exact linear solution of the problem of absolute orientation. — Photogrammetria, 1958—1959, 15, № 4.

Статья поступила 21 апреля 1980 г.

ОБ ОБРАБОТКЕ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ЗВЕЗДЫ

Возможность определения астрономических координат путем фотографирования звезд в поле зрения астрономического универсала АУ-2/10 с помощью фотографической насадки и электронного устройства для регистрации моментов наблюдений показана в работе [3].

В результате многократного фотографирования звезды на один и тот же кадр получают негатив с изображением прерывистого следа звезды и неподвижных нитей, помещенных в фокальной плоскости объектива.

На рисунке O — точка пересечения вертикальной и горизонтальной нитей; $\sigma_1\sigma_2\sigma_n$ — след (суточная параллель) звезды; $O\delta_0$ — круг склонений звезды, проходящей через точку O и перпендикулярный следу $\sigma_1\sigma_2\sigma_n$.

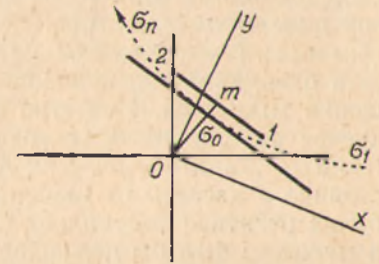


Схема негатива.

Во время наблюдений фиксируются моменты экспозиций (обычно продолжительностью в одну секунду) и горизонтальные координаты точки O . На негативе положение звезды в момент экспозиции изображается короткой черточкой. Экваториальные координаты α и δ наблюдаемой звезды считаются известными.

Задача обработки негатива заключается в определении для некоторого момента T_0 горизонтных и экваториальных координат одной из точек негатива. В качестве такой точки примем точку O . Тогда определению подлежат момент T_0 прохождения звезды через круг склонения $O\delta_0$ и угловое расстояние $\Delta\delta = \angle O\sigma_0$. Экваториальные координаты α и δ точки O в момент T_0 примут значения $\alpha_0 = \alpha$, $\delta_0 = \delta \pm \Delta\delta$. Искомые T_0 и $\Delta\delta$ получают путем измерений негатива, которые сводятся к измерению прямоугольных координат x_i , y_i точек следа и координат x_0 , y_0 точки O в системе измерительного прибора. Зависимость между измеренными и искомыми значениями величин можно установить различными способами. Для полевых определений важно обеспечить простоту обработки негатива и достаточную точность окончательных результатов определений.

Остановимся сначала на краткой характеристике негатива. Заметим, что фотонасадка практически представляет собой фотокассету, прикрепленную к окулярному концу трубы за окуляром на некотором удалении d от него.

Если сетку неподвижных нитей совместить с передней плоскостью окуляра, а последнюю — с задней фокальной плос-