

решение он выполнял способом наименьших квадратов, отмечая, что подобные вычисления производятся до тех пор, пока расхождения в масштабе и элементах матрицы между двумя последующими циклами не станут относительно малыми.

Такие вычисления по вторичному уравниванию нами выполнены. Для этого использовали программу преобразования квазигеоцентрических систем и находили матрицу A , умноженную на масштаб. Применялся способ, изложенный в работе [1]. Анализ вычислений показал, что расхождения между преобразованными и исходными координатами уменьшаются в 1,5—2 раза, но после двух-трех приближений стабилизируются (табл. 3).

Следовательно, параметры a , b , c и d матрицы Родрига из-за наличия ошибок координат необходимо определять по способу наименьших квадратов. Матрица (9) — ортогональна, поэтому можно находить параметры a , b , c и для нее. Вторичное уравнивание уменьшает расхождения между заданными и преобразованными координатами на исходных пунктах. Метод Осваль—Баласубраманьяна позволяет быстро ортогонализировать матрицу, но расхождения между исходными и преобразованными с помощью такой матрицы координатами могут быть значительными.

Список литературы: 1. Буткевич А. В., Кириллов В. Г. К вопросу о конформности преобразований прямоугольных координат в пространстве. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30. 2. Кириллов В. Г. К вопросу о преобразовании ортогональных систем координат в спутниковой геодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 3. Hamilton W. R. Elements on quaternions. — London, 1866. 4. March J. C., Douglas B. C., Klosko S. M. The relation of the European Datum to a geocentric reference system. — Bulletin géodésique, 1972, 106. 5. Mirsky L. An introduction to linear algebra. — Oxford: Clarendon Press, 1955. 6. Mueller I. I. Global satellite triangulation and trilateration results. — Journal of geophysical research, 1974, 79, № 35. 7. Oswal H. L., Balasubramanian S. An exact solution of absolute orientation. — Photogrammetric Engineering, 1968, 34, № 10. 8. Oswal H. L. A new method of constructing of orthogonal matrix. — Photogrammetric Record, 1971, № 37. 9. Rinner K. Die räumliche Drehstreckung. — Acta technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 1965, 52, № 3—4. 10. Sanso F. An exact solution of the roto-translation problem. — Photogrammetria, 1973, 29, № 6. 11. Schut G. H. Construction of orthogonal matrices and their application in analytical photogrammetry. — Photogrammetria, 1958—1959, 15, № 4. 12. Schut G. H. On exact linear equation for the computation of the rotational elements of absolute orientation. — Photogrammetria, 1960—1961, 17, № 1. 13. Thompson E. H. A method for the construction of orthogonal matrices. — Photogrammetric Record, 1959, 3, № 13. 14. Thompson E. H. An exact linear solution of the problem of absolute orientation. — Photogrammetria, 1958—1959, 15, № 4.

Статья поступила 21 апреля 1980 г.

ОБ ОБРАБОТКЕ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ОДНОЙ ЗВЕЗДЫ

Возможность определения астрономических координат путем фотографирования звезд в поле зрения астрономического универсала АУ-2/10 с помощью фотографической насадки и электронного устройства для регистрации моментов наблюдений показана в работе [3].

В результате многократного фотографирования звезды на один и тот же кадр получают негатив с изображением прерывистого следа звезды и неподвижных нитей, помещенных в фокальной плоскости объектива.

На рисунке O — точка пересечения вертикальной и горизонтальной нитей; $\sigma_1\sigma_2\sigma_n$ — след (суточная параллель) звезды; $O\delta_0$ — круг склонений звезды, проходящей через точку O и перпендикулярный следу $\sigma_1\sigma_2\sigma_n$.

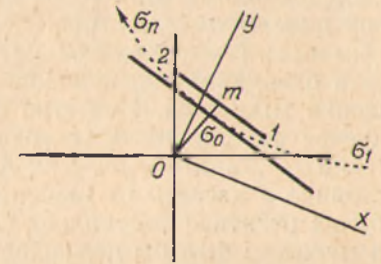


Схема негатива.

Во время наблюдений фиксируются моменты экспозиций (обычно продолжительностью в одну секунду) и горизонтальные координаты точки O . На негативе положение звезды в момент экспозиции изображается короткой черточкой. Экваториальные координаты α и δ наблюдаемой звезды считаются известными.

Задача обработки негатива заключается в определении для некоторого момента T_0 горизонтных и экваториальных координат одной из точек негатива. В качестве такой точки примем точку O . Тогда определению подлежат момент T_0 прохождения звезды через круг склонения $O\delta_0$ и угловое расстояние $\Delta\delta = \angle O\sigma_0$. Экваториальные координаты α и δ точки O в момент T_0 примут значения $\alpha_0 = \alpha$, $\delta_0 = \delta \pm \Delta\delta$. Искомые T_0 и $\Delta\delta$ получают путем измерений негатива, которые сводятся к измерению прямоугольных координат x_i , y_i точек следа и координат x_0 , y_0 точки O в системе измерительного прибора. Зависимость между измеренными и искомыми значениями величин можно установить различными способами. Для полевых определений важно обеспечить простоту обработки негатива и достаточную точность окончательных результатов определений.

Остановимся сначала на краткой характеристике негатива. Заметим, что фотонасадка практически представляет собой фотокассету, прикрепленную к окулярному концу трубы за окуляром на некотором удалении d от него.

Если сетку неподвижных нитей совместить с передней плоскостью окуляра, а последнюю — с задней фокальной плос-

костью объектива, то нити и изображения звезды будут построены на негативе лучами, направленными вдоль соответствующих оптических осей окуляра. На негативе при работе с АУ-2/10 получим прямое изображение по вертикали и обратное — по горизонтали.

В соответствии с основами фотографической астрометрии под масштабом снимка m понимаем отношение $m = \sigma''/l_{\text{мм}}$, где σ'' — угловое расстояние между точками небесной сферы в секундах дуги, $l_{\text{мм}}$ — линейное расстояние в миллиметрах между изображениями этих точек на пластинке, полученное в фокальной плоскости объектива. Если M — в нашем случае масштаб негатива; f — фокусное расстояние окуляра, то можно записать очевидное соотношение $m/M = d/f = W$. Здесь W — уменьшение масштаба. Известно также, что $l = F \operatorname{tg} \sigma$, где F — фокусное расстояние объектива. Поэтому в первом приближении $l = F \sigma''/\rho''$, а $m = \rho''/F$. Для АУ-2/10 $F = 450$ мм и $m = 458''$. Расстояние d кассеты от окуляра выбирали с таким расчетом, чтобы на негативе получились четкие изображения нитей и звезды, а масштаб был бы поменьше. При оптимальном d масштаб негатива $M \approx 82''$ в одном миллиметре.

Идеальное фотографическое изображение рассматривают как центральную проекцию небесной сферы на плоскость снимка через вторую главную точку объектива или как гномоническую проекцию сферы радиуса F на касательную к ней плоскость.

Поле зрения трубы астрономического универсала равно $54'$, размер негатива 36 мм \times 24 мм или с учетом масштаба $49' \times 33'$. Если ограничиться центральной частью негатива размером 10×10 мм, то такую часть сферической поверхности можно считать плоскостью. Расчеты показывают, что линия на негативе длиной 10 мм получит в результате замены сферы плоскостью искажение, равное $0,002$ мм. Этой погрешностью можно пренебречь.

Масштаб в центральной части негатива считаем постоянным. В самом деле, $M = m/W = \sigma''/W \cdot F \operatorname{tg} \sigma$. Применяя разложение $\operatorname{tg} \sigma$ в ряд, получаем

$$M = \rho''/W \cdot F - \sigma''^2/3WF\rho'' = M_0 - \Delta M,$$

где M_0 — неизменная часть масштаба; ΔM — переменная часть, определяемая величиной σ (удалением точки негатива от оптического центра, который в идеальном случае совпадает с центром снимка). Если $\sigma = 820''$, то $\Delta M = 0,0004''$. Такая величина также пренебрегаемо мала.

Измерения негатива производятся с помощью координатно-измерительной машины, стереокомпаратора или другого прибора, позволяющего получить прямоугольные координаты x и y точек негатива. Опыт измерений на стереокомпараторе показывает, что положение точек следа звезды на негативе определяется со средней квадратической погрешностью $\pm 0,012$ мм, или $\pm 1''$.

В фотографической астрометрии связь между измеренными и экваториальными координатами устанавливается через идеальные или тангенциальные координаты. Для установления этой связи необходимо иметь экваториальные координаты оптического центра снимка. Обычно принятые координаты оптического центра не соответствуют истинному его положению. В формулах связи идеальных координат с измеренными появляются квадратичные члены [2]: $\Delta \xi = (px + qy)x$; $\Delta \eta = (px + qy)y$. Здесь p и q — координаты истинного оптического центра относительно начала измеренных координат. В нашей задаче начало измеренных координат легко приводится к точке пересечения нитей. Положим для простоты $q = 0$, $x = y$. Учитывая размеры негатива, принимаем $x = 20'/\rho''$. Потребуем, чтобы $\Delta \xi \leq 0,05''$. Тогда $\rho = 1475''/M \approx 18$ мм. Это означает, что в нашем случае можно принять линейную зависимость между идеальными и измеренными координатами.

Возвратимся к обработке негатива. Во время наблюдений инструмент устанавливается так, чтобы след звезды проходил примерно через центр снимка. Поэтому при обработке наблюдений используют точки следа, удаленные от центра не более чем на $5-7$ мм ($7'-10'$).

Связь между измеренными и тангенциальными координатами можно выразить формулами с четырьмя неизвестными: $\xi = -x - ax + by + c$; $\eta = y - by - ax + d$. Неизвестные a , b , c , d находят по двум опорным звездам. Метод четырех постоянных применяется, когда по двум опорным звездам определяется положение какого-либо объекта снимка. Лучшие результаты получают, если объект находится посередине между опорными звездами.

Воспользуемся способом решения этой задачи, предложенным А. Н. Дейчем [1]. Пусть x_1 , y_1 и x_2 , y_2 — измеренные, α_1 , δ_1 и α_2 , δ_2 — экваториальные координаты опорных звезд; x_0 , y_0 — измеренные координаты определяемого объекта. Тогда искомые экваториальные координаты α_0 и δ_0 объекта вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 + a_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^s + b_1 (\delta_2 - \delta_1)'' \frac{\sec D}{15} - \\ &\quad - a_1 a_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^s (\delta_2 - \delta_1)'' \frac{\operatorname{tg} D}{\rho''} + \\ &\quad + b_1 (\delta_2 - \delta_1)'' [\delta_1 + a_1 (\delta_2 - \delta_1) - D] \frac{\sec D}{15 \rho''} \operatorname{tg} D; \quad (1) \\ \delta_0 &= \delta_1 + a_1 (\delta_2 - \delta_1)'' - b_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^s 15 \cos D + \\ &\quad + \frac{1}{4} a_1 a_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^s \sin 2D \frac{15^2}{\rho''} + \\ &\quad + b_1 (\alpha_2 - \alpha_1)^s [\delta_2 - a_1 (\delta_2 - \delta_1) - D] \frac{15}{\rho''} \cos D \operatorname{tg} D. \end{aligned}$$

Здесь D — склонение оптического центра;

$$a_1 = -\frac{\Delta x \Delta x_1 + \Delta y \cdot \Delta y_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad b_1 = \frac{\Delta x \Delta y_1 - \Delta y \cdot \Delta x_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad (2)$$

$\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta x_1 = x_1 - x_0$; $\Delta y_1 = y_1 - y_0$. Коэффициенты a_2, b_2 можно получить применительно ко второй опорной звезде, причем $|a_1| + |a_2| = 1, b_1 = b_2$.

На нашем негативе определяемым объектом будет точка O пересечения вертикальной и горизонтальной нитей, а опорными звездами — точки следа одной и той же звезды, расположенные симметрично относительно точки σ_0 (рисунок). Две опорные точки выбираем следующим образом:

1) находим (визуально) ближайшую к основанию прямой $O\sigma_0$ точку следа и принимаем ее за точку симметрии;

2) по обе стороны от точки симметрии выбираем одно и то же число точек следа (четыре—шесть);

3) вычисляем среднее арифметическое из моментов наблюдений и измеренных координат первой половины точек следа, ключая точку симметрии; получим T_1, x_1, y_1 ;

4) точно так же для второй половины точек находим T_2, x_2, y_2 .

Сразу же заметим, что первая (x_1, y_1) и вторая (x_2, y_2) опорные точки будут иметь склонение, равное $\delta + \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{15^2 (T_2 - T_1)^2}{32 \rho''} \sin 2\delta$ — поправка, обусловленная учетом кривизны суточной параллели при объединении в арифметическое среднее координат точек этой кривой.

Формулы (1) для рассматриваемого случая упрощаем, так как $\delta_2 = \delta_1 = \delta$, а $D \approx \delta$. Кроме того, принимая $a_0 - a_1 = -(T_0 - T_1)$, $a_2 - a_1 = -(T_2 - T_1)$, имеем

$$T_0 = T_1 + a_1 (T_2 - T_1); \quad \delta_0 = \delta + \varepsilon + b_1 (T_2 - T_1)^2 \cdot 15 \cos \delta + \frac{1}{4} a_1 a_2 (T_2 - T_1)^2 \cdot \frac{15^2}{\rho''} \sin 2\delta - b_1 (T_2 - T_1) \frac{15}{\rho''} \cos \delta (\delta - D) \operatorname{tg} \delta.$$

Без ущерба для точности можно положить $a_1 a_2 = \frac{1}{4}$, $D = \delta_0$. Тогда

$$\delta_0 = \delta + b_1 (T_2 - T_1) 15 \cos \delta + \frac{15^2 \cdot 3}{32 \rho''} (T_2 - T_1) \sin 2\delta + b_1 (T_2 - T_1) \frac{15}{\rho''} \cos \delta (\delta_0 - \delta) \operatorname{tg} \delta.$$

Введем обозначения

$$\Delta \delta_1 = b_1 (T_2 - T_1) 15 \cos \delta;$$

$$\Delta \delta_2 = 1,02 \cdot 10^{-4} (T_2 - T_1)^2 \sin 2\delta; \quad \Delta \delta_3 = \frac{\Delta \delta_1^2}{\rho''} \operatorname{tg} \delta.$$

В этом случае искомые в процессе обработки негатива величины определяются выражениями

$$T_0 = T_1 + a_1 (T_2 - T_1); \quad \delta_0 = \delta + \Delta \delta_1 + \Delta \delta_2 + \Delta \delta_3. \quad (3)$$

Эту же задачу, учитывая свойства негатива, можно решить и методами аналитической геометрии на плоскости. Упрощая решение, совместим начало измеренных координат с точкой пересечения вертикальной и горизонтальной нитей. Координаты точек следа звезды уменьшатся соответственно на x_0 и y_0 , а координаты пересечения нитей примут нулевые значения.

Используя описанный выше прием, определяем опорные точки 1— (T_1, x_1, y_1) и 2— (T_2, x_2, y_2) . Допустим, что прямая 1—2 (см. рисунок) параллельна касательной к суточной параллели в точке σ_0 . Тогда круг склонения $O\sigma_0$, перпендикулярный к линии 1—2, пересечет ее в точке m .

Нетрудно показать, что для нахождения момента T_0 и разности $\Delta \delta = \delta_0 - \delta$ достаточно вычислить координаты x_m и y_m точки m . Для этой цели запишем уравнения двух взаимно перпендикулярных прямых 1—2 и O_m :

$$y_m - y_1 = k (x_m - x_1); \quad y_m = -\frac{1}{k} x_m.$$

Здесь $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ — угловой коэффициент. Решая уравнения, получаем

$$y_m = \frac{y_1 - k x_1}{1 + k^2}; \quad x_m = -k y_m. \quad (4)$$

Оценим теперь насколько правомерным было допущение о параллельности прямой 1—2 и касательной к параллели в точке δ_0 . Обычно промежуток времени между смежными экспозициями равен 5 с. Следовательно, точка симметрии будет удалена от точки δ_0 максимум на 2,5 с или на 37,5 с дуги, которые и определяют угол между рассматриваемыми прямыми. Наличие этого угла повлечет за собой погрешность в угловом коэффициенте $\Delta k = 1,84 \cdot 10^{-4}$. В неблагоприятном случае, когда $y_m = 5$ мм, погрешность $\Delta x_m = 0,001$ мм. Такой же порядок получает и погрешность Δy_m . В серии наблюдаемых звезд малые погрешности Δx_m и Δy_m будут выступать как случайные. Поэтому допущение о параллельности прямых не окажет заметного влияния на конечный результат определений.

Обозначим $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$. Тогда скорости изменения прямоугольных координат звезды найдем из выражений

$$V_x = \Delta x / T_2 - T_1; \quad V_y = \Delta y / T_2 - T_1.$$

Разность моментов времени $T_0 - T_1$ можно вычислить по формулам

$$T_0 - T_1 = \frac{x_m - x_1}{V_x} = \frac{y_m - y_1}{V_y}.$$

После небольших преобразований получим

$$T_0 = T_1 - \frac{\Delta x \cdot x_1 + \Delta y \cdot y_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} (T_2 - T_1).$$

Принимая обозначения А. Н. Дейча, имеем

$$T_0 = T_1 + a_1 (T_2 - T_1). \quad (5)$$

Обратимся к уравнениям (4). Подставляя в них $\Delta y/\Delta x$ вместо k , находим

$$y_m = \frac{\Delta x y_1 - \Delta y \cdot x_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \quad x_m = \frac{\Delta x y_1 - \Delta y \cdot x_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Delta y.$$

С обозначениями А. Н. Дейча $y_m = b_1 \Delta x$, $x_m = b_1 \Delta y$. Непосредственно из чертежа $Om = \delta + \varepsilon - \delta_0$, где

$$\varepsilon = \frac{3 \cdot 15^2}{32 \rho''} (T_2 - T_1)^2 \sin 2\delta - \text{стрелка прогиба суточной параллели. Если } \varphi - \text{угол, образованный следом звезды с осью абсцисс, то } (Om)'' = M \cdot x_m \sin \varphi = -M y_m \cos \varphi. \text{ Принимая во внимание, что}$$

$$\sin \varphi = \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}};$$

масштаб $M = \frac{15 (T_2 - T_1) \cos \delta}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, находим $(Om)'' = b_1 (T_2 - T_1) \cdot 15 \cos \delta$, а

$$\delta_0 = \delta + b_1 (T_2 - T_1) \cdot 15 \cos \delta + 1,02 \cdot 10^{-4} (T_2 - T_1)^2 \sin 2\delta. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) решают поставленную задачу. Они тождественные формулам (3), если не считать отсутствия в (6) члена

$\Delta \delta_3 = \frac{\Delta \delta_2^2}{\rho''} \operatorname{tg} \delta$. Этот член учитывает несовпадение по склонению

оптического центра со следом звезды. Обычно его значение не превосходит нескольких сотых долей секунды и может не приниматься во внимание.

Вычисления долготы по 18 звездам способом Цингера с применением формул (5) и (6) привели к результату, который отклонился от точного значения на 0,006 с.

Таким образом, полученные формулы могут найти применение для обработки фотографических наблюдений одной звезды. Они несложны и обеспечивают достаточную точность вычислений.

Список литературы: 1. Альбицкий В. А. и др. Курс астрофизики и звездной астрономии. — М.: Гостехиздат, 1951. 2. Кениг А. Фотографическая астрометрия. Методы астрономии / Пер. с англ. — М.: Мир, 1967. 3. Коваленко В. А., Колгунов В. М. Об опытных астрономических наблюдениях фотографическим способом. — Геодезия и картография, 1976, № 3.

Статья поступила 19 апреля 1980 г.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Из теории имеющихся на производстве свето- и радиодальномеров известно, что погрешности измеренных ими линий делятся на две группы. Одна группа — погрешности, не зависящие от длины линии S , а другая — погрешности, пропорциональные ей. На основании этого квадрат средней квадратической погрешности измеренных линий принято представлять в виде [5]

$$m^2 = a^2 + (bS)^2, \quad (1)$$

где m — средняя квадратическая погрешность измеренной линии; a и bS — средние квадратические погрешности, отображающие суммарное действие погрешностей соответственно первой и второй групп.

Поэтому представляет интерес изучение влияния характера погрешностей, измеренных дальномерами сторон на точность сетей трилатерации. В настоящей статье приведены результаты исследований этого вопроса, выполненных методом имитационного моделирования на небольших макетах сетей трилатерации.

Процесс исследования заключался в моделировании погрешностей измеренных сторон, искажении ими сторон идеального макета, строгом уравнивании сети, определении истинных погрешностей уравненных сторон макета и их средних квадратических погрешностей, а также в вычислении истинных сдвигов пунктов макета, вызванных погрешностями уравненных сторон. При моделировании принимали, что суммы погрешностей первой и второй групп — независимые случайные величины, распределенные нормально. Каждую из суммарных погрешностей моделировали отдельно. При этом считали, что стандарт первой суммарной погрешности $a = 1$ см, а второй $bS = 1 \cdot 10^{-6} S$ см, т. е.

$$m^2 = [1^2 + (1 \cdot 10^{-6} S)^2] \text{ см.} \quad (2)$$

Такие значения стандартов приняты для упрощения вычислений. Отметим, что они не ограничивают интерпретационных возможностей полученных результатов, так как сумма двух случайных нормально распределенных величин является тоже случайной величиной с таким же распределением, а изменение стандарта погрешностей в N раз, вызовет изменение каждой погрешности при моделировании в N раз.

Уравнивание сетей выполняли на ЭВМ М-222 с учетом всех возникающих в сети условных ураниений. Истинную погрешность Δ уравненной стороны определяли, суммируя введенную и нее погрешность и поправку, полученную из уравнивания. По