УДК 528.21:530.511

М. М. ФЫС

О ВЫЧИСЛЕНИИ МОДЕЛЬНЫХ СТОКСОВЫХ ПОСТОЯННЫХ ЗЕМЛИ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ О ЕЕ ПЛОТНОСТИ, ЧАСТИЧНОЙ СУММОЙ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ

В последнее время в ряде работ модельное распределение плотности планеты представлялось в виде суммы обобщенного ряда Фурье по системе многочленов, ортогональных внутри шара [1, 2] или эллипсоида вращения [3]. Дальнейшим развитием такого подхода является использование биортогональных систем многочленов внутри трехосного эллипсоида τ $\left\{\frac{x^2}{A^2}+\right.$ $\left.+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}\leqslant 1\right\}$ с полуосями A, B, C, когда плотность вещества, заключенного в нем, может быть представлена разложением по системе многочленов $\{W_{ije}\}$

$$\delta(x, y, z) = \sum_{m=i+j+e=0}^{\infty} b_{ije} W_{ije}(x, y, z), \tag{1}$$

где

$$W_{ije}(x, y, z) = \frac{1}{2^m i!\, j!\, e!} \frac{\partial^m}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^e}\left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1\right)^m, \tag{2}$$

а коэффициенты разложения суть

$$b_{ije} = \frac{\int\limits_\tau \delta\omega_{ije}(x, y, z)\, d\tau}{\int\limits_\tau \omega_{ije}(x, y, z)\, W_{ije}(x, y, z)\, d\tau}, \tag{3}$$

в которых $\{\omega_{ije}\}$ — вторая система многочленов, биортогональных в τ к многочленам системы $\{W_{ije}\}$.

Задав таким образом форму планеты и ее плотность, можно выразить стоксовые постоянные такой модели через коэффициенты b_{ije} разложения (1). С этой целью вспомним [4], что

$$\left.\begin{matrix} C_{ns} \\ S_{ns} \end{matrix}\right\} = \sum_{p+q+n-s} \left.\begin{matrix} \alpha_{pqs} \\ \beta_{pqs} \end{matrix}\right\} I_{pqs}, \tag{4}$$

где

$$I_{pqs} = \frac{1}{Ma^n} \int\limits_\tau \delta x^p y^q\, d\tau \tag{5}$$

— степенные моменты плотности, α_{pqs}, β_{pqs} — коэффициенты связи степенных моментов со стоксовыми постоянными планеты, M — масса Земли, a — средний радиус. Численные значения коэффициентов α_{pqs}, β_{pqs} приведены в статье [4]. Найдем теперь степенные моменты I_{pqs} модельного распределения (1). Подставив (1) в (4), получим

$$I_{pqs} = \frac{1}{Ma^n} \int\limits_\tau \left[\sum_{m=i+j+e=0} b_{ije} \frac{1}{2^m i!\, j!\, e!} \frac{\partial^m}{\partial x^i\, \partial y^j\, \partial z^e} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1\right)\right]^m d\tau \tag{6}$$

и после вычислений с учетом (4) имеем

$$\sum \left.\begin{matrix} C^*_{nk} \\ S^*_{nk} \end{matrix}\right\} = \frac{3}{\delta_c} \sum_{p+q+s=n} \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{i+j+e=m \\ i<p,\ j<q,\ e<s \\ p-i,\ q-j,\ s-e - \text{четные}}} \left.\begin{matrix} \alpha_{pqs} \\ \beta_{pqs} \end{matrix}\right\} \times$$

$$\times \frac{b_{ije}\, m!\, \alpha^{p-i} \beta^{q-j} \gamma^{s-e}}{a^m (m+n-3)!!\, i!\, j!\, e!\, (p-i)!!\, (q-j)!!\, (s-e)!!} \tag{7}$$

— выражения модельных стоксовых постоянных через коэффициенты разложения (1) и коэффициенты α_{pqs}, β_{pqs}; в формуле (7) $\delta_c = 5{,}517$ г/см³ — средняя плотность, $\alpha = \frac{A}{a}$, $\beta = \frac{B}{a}$, $\gamma = \frac{C}{a}$.

Отметим важное свойство выражения (7). Из него следует, что в отличие от (1) в формуле (7) фигурирует конечная сумма и модельные стоксовые n-го порядка зависят только от коэффициентов b_{ije} до n-й степени.

Рассмотрим сумму слагаемых в формуле (7), соответствующую нашему случаю. Она имеет вид

$$\frac{3n!}{\delta_c (2n+3)!!} \sum_{p+q+s=n} \left.\begin{matrix} \alpha_{pqs} \\ \beta_{pqs} \end{matrix}\right\} \frac{b_{pqs}}{a^n}, \tag{8}$$

показывающий, что в формуле (7) коэффициенты b_{pqs} с общей суммой индексов, равной n, входят в такой же линейной комбинации, в какой степенные моменты J_{pqs} входят в стоксовы постоянные в (4).

Выпишем теперь выражения вида (4) до 6-го порядка включительно. Введем обозначения

$$\left.\begin{matrix} u_{nk} \\ v_{nk} \end{matrix}\right. = \sum_{i+j+e=n} \left.\begin{matrix} \alpha_{ije} \\ \beta_{ije} \end{matrix}\right\} \frac{b_{ije}}{a^n}, \tag{9}$$

$$e_{nk} = \int_\tau P_n^k(\cos\Theta) \cos k\lambda\, d\tau. \tag{10}$$

Заметим, кстати, что если τ — шар, то $l_{nk} = 0$, и тогда все слагаемые в (7), за исключением (8), равны нулю. Тогда, учитывая формулы (7), из формулы (4) получим:

$$C^*_{00} = \frac{u_{00}}{\delta_c} = 1;$$

$$C^*_{20} = \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{2!}{7!!} u_{20} + \frac{1}{3} e_{20} u_{00}\right], \quad C^*_{22} = \frac{3!}{\delta_c}\left[\frac{2!}{7!!} u_{22} + \frac{1}{3} e_{22} u_{00}\right];$$

$$C^*_{30} = \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{3!}{9!!} u_{30} + \frac{1}{21} e_{20} u_{10}\right], \quad C^*_{33} = \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{3!}{9!!} u_{33} + \frac{1}{42} e_{22} u_{11}\right];$$

$$
\left.
\begin{aligned}
S^*_{33} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{3!}{9!!}v_{33}+\frac{1}{42}e_{22}v_{11}\right],\\
C^*_{40} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{4!}{11!!}u_{40}+\frac{24}{9!!}\left(e_{20}u_{20}+e_{22}u_{22}+\frac{1}{7!!}e_{40}u_{00}\right)\right];\\
S^*_{40} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{4!}{11!!}v_{40}+\frac{2!}{9!!}\left(e_{22}v_{20}+e_{20}v_{22}\right)+\frac{1}{7!!}e_{40}u_{00}\right];\\
S^*_{42} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{4!}{11!!}v_{42}+\frac{10}{9!!}e_{20}v_{22}\right];\\
C^*_{52} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{5!}{13!!}u_{52}+\frac{3!}{11!!}\left(e_{22}u_{30}+6e_{20}u_{33}\right)+\frac{1}{9!!}e_{32}u_{10}\right];\\
C^*_{55} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{5}{13!!}u_{55}+\frac{3!}{11!!}e_{22}u_{33}\right];\\
S^*_{55} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{5!}{13!!}v_{55}+\frac{3!}{11!!}e_{22}v_{33}+\frac{1}{9!!}e_{44}v_{1}\right];\\
C^*_{64} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{6!}{15!!}u_{64}+\frac{4!}{13!!}\left(e_{22}u_{42}+e_{20}u_{44}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2!}{9!!}\left(e_{44}u_{20}+e_{42}u_{22}\right)+\frac{1}{7!!}e_{64}u_{00}\right];\\
S^*_{64} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{6!}{15!!}v_{64}+\frac{4!}{13!!}\left(e_{22}v_{42}+e_{20}v_{44}+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{2!}{9!!}\left(e_{44}v_{20}+e_{42}v_{22}\right)+\frac{1}{7!!}e_{64}\right)u_{00}\right];\\
C^*_{66} &= \frac{3}{\delta_c}\left[\frac{6!}{15!!}u_{66}+\frac{4!}{13!!}e_{22}u_{44}+\frac{2!}{11!!}e_{44}u_{22}+\frac{1}{9!!}e_{66}u_{00}\right].
\end{aligned}
\right\}
\qquad (11)
$$

При представлении плотности рядом (1) с усечением его степенью N формулы (7), (4), (11) позволяют вычислить модельные стоксовые постоянные C^*_{nk}, S^*_{nk} произвольного порядка. При $n \leqslant N$ они совпадают с используемыми постоянными C_{nk}, S_{nk} до N-го порядка, а при $n > N$ отличаются от них. Степень их отличия характеризует в некотором роде качество построения модели, показывая степень согласованности гравитационных полей: использованного при построении модели и развиваемого ею.

Список литературы: 1. *Мещеряков Г. А.* Использование стоксовых постоянных Земли для уточнения ее механической модели. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1975, вып. 21. 2. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Использование стоксовых постоянных при построении ее глобальных механических моделей. — Прага, 1975. 3. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.*

Об эллипсоидальном распрелелении плотности земных недр — Геодезический сборник АН УССР, 1978, вып. 86. 4. *Мещеряков Г. А., Фыс М. М.* О связи степенных моментов плотности земных недр со стоксовыми постоянными. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30.

Статья поступила в редколлегию 19. 15. 81