УДК 523.3/8

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ, В. В. КИРИЧУК, М. М. ФЫС

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ПРИ ТОЧЕЧНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Многие задачи прикладной математики и геодезии сводятся к построению многочлена $Q_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, где коэффициенты a_i определяются из системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n; \\ y_1 = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_n x_m^n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

в которой, как правило, величины y_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ получены по результатам измерений или наблюдений.

Вводя матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \cdots x_0^n \\ 1 & x_1 \cdots x_1^n \\ \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & x_m \cdots x_m^n \end{pmatrix}; \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

перепишем систему уравнений (1) в матричном виде

$$Y = Ca. \tag{1a}$$

При $n=m$ построенный многочлен $Q_n(x)$ есть полином Лагранжа [2]. Если значения y_i получены из измерений, сопровождающихся ошибками, систему (1) следует решать под условием наименьших квадратов. При $m>n$ решение задачи вообще имеет смысл только при некотором дополнительном условии, например с использованием принципа наименьших квадратов.

Учитывая наличие ошибок в величинах y_i, вместо (1) запишем

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n - y_0 &= v_0; \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n - y_1 &= v_1; \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_m + \cdots + a_n x_m^n - y_m &= v_m, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где v_j — остаточные отклонения в указанных уравнениях связи (1). Будем искать полином $Q_n(x)$ под условием

$$\sum_{i=0}^{m} v_i^2 = [vv] = \min. \tag{3}$$

Тогда его коэффициенты a_i — суть элементы матрицы

$$a = (C^T C)^{-1} C^T Y, \tag{4}$$

где

$$(C^T C) = \begin{Vmatrix} m+1 & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n \\ \sum\limits_{i=0}^{m} x_i & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^n & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{n+1} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{m} x_i^{2n} \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

Пусть для удобства записей

$$B = (C^T C)^{-1}, \tag{6}$$

причем $B = (b_{kt})$ — квадратная матрица порядка $n+1$.

Схема решения системы (2) под условием (3) дана в работах [2, 4], где отмечено, однако, что она обычно приводит к решению системы с плохо обусловленной матрицей или с матрицей с большими численными значениями элементов, особенно при высоких степенях многочлена $Q_n(x)$. Поэтому во избежание отмеченных трудностей будем искать элементы обратной матрицы в замкнутом виде, что позволит просто определить коэффициенты аппроксимирующего многочлена через x_i, y_i.

Рассмотрим сначала случай $m=n$. Найдем элементы матрицы (6). Вычислим определитель матрицы (5). Имеем

$$|C^T C| = |C^T||C| = \prod_{i \neq j}^{n} (x_j - x_i)^2, \tag{7}$$

так как C^T, C — квадратные и $|C|$ — определитель Вандермонда.

Найдем минор матрицы (5) M_{11}. Нетрудно убедиться, что

$$M_{11} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma^2_{i_1, i_2, \ldots, i_n; n} \sum_{\substack{i=i_1, \ldots, i_n \\ j=i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2,$$

где $\sigma_{i_1, i_2, \ldots, i_n; n} = x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ — элементарный симметричный многочлен степени n, который в общем случае имеет вид *

$$\sigma_{i_1, \ldots, i_n; s} = x_{i_1} \cdots x_{i_s} + \cdots + x_{i i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} + \cdots$$

Заметим, что $\sigma_{i_1, \ldots, i_n; 0} = 1$.

Аналогично, раскрывая миноры M_{kk}, а затем M_{kt}, получаем

$$M_{kk} = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \prod_{\substack{i=i_1, \ldots, i_n \\ j=i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2;$$

$$M_{kt} = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t} \prod_{\substack{i=i_1, \ldots, i_n \\ j=i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2. \tag{8}$$

Из определения обратной матрицы и с учетом симметричности матрицы (6) имеем

$$b_{kt} = \frac{(-1)^{k+1} \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t} \prod\limits_{\substack{i=i_1, \ldots, i_n \\ j=i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{\prod\limits_{i \neq 1}^{n} (x_i - x_j)^2}.$$

А после упрощений получаем окончательно

$$b_{kt} = (-1)^{k+t} \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{n} \frac{\sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-k} \sigma_{i_1, \ldots, i_n; n-t}}{\prod\limits_{\substack{i=i_1, \ldots, i_n \\ j=i_1, \ldots, i_n}}^{i \neq j} (x_i - x_j)^2} — \tag{9}$$

элементы обратной матрицы (6).

---

* Построение симметрических многочленов приведено ниже в качестве примера.

Будем теперь считать, что $m>n$. Найдем для этого случая определитель $|C^TC|$. Представляя последний в виде суммы определителей и пользуясь известными их свойствами, получим

$$|C^TC| = \sum_{i_1,\cdots,i_{n+1}=0}^{m} \begin{vmatrix} 1 & x_{i_1} & \cdots & x_{i_1}^n; \\ x_{i_2} & x_{i_2}^2 & \cdots & x_{i_2}^{n+1}; \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_{n+1}}^n & x_{i_{n+1}}^{n+1} & \cdots & x_{i_{n+1}}^{2n}. \end{vmatrix}.$$

Сгруппировав подобные члены, найдем

$$|C^TC| = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}}}^{m} \prod_{\substack{i=i_1,\cdots,i_{n+1} \\ j=i_1,\cdots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i-x_j)^2. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что из этой формулы при $m=n$ следует уравнение (7), так как при суммировании в (10) будет только одна комбинация различных индексов, например $i_1=0$, $i_2=1$, ..., $i_{n+1}=n$.

Теперь вместо формулы (9) имеем

$$b_{lt} = \frac{(-1)^{l+t} \sum\limits_{i_1,\cdots,i_n=0}^{m} \sigma_{i_1,\cdots,i_n;\,n-l}\,\sigma_{i_1,\cdots,i_n;\,n-t} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\cdots,i_n \\ j=i_1,\cdots,i_n}}^{i\neq j} (x_i-x_j)^2}{\sum\limits_{\substack{i_1,\cdots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}}}^{m} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\cdots,i_{n+1} \\ j=i_1,\cdots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i-x_j)^2}. \tag{11}$$

Наконец, объединяя все распределения имеем окончательное решение задачи

$$a_l = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n+1}(-1)^{l+t} \sum\limits_{i_1,\cdots,i_n=0}^{m} \sigma_{i_1,\cdots,i_n;\,n-l}\,\sigma_{i_1,\cdots,i_n;\,n-t} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\cdots,i_n \\ j=i_1,\cdots,i_n}}^{i\neq j} (x_i-x_j)^2}{\sum\limits_{\substack{i_1,\cdots,i_{n+1}=0 \\ i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}}}^{m} \prod\limits_{\substack{i=i_1,\cdots,i_{n+1} \\ j=i_1,\cdots,i_{n+1}}}^{i\neq j} (x_i-x_j)^2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} x_i^k y_i.$$

Последняя формула легко программируется на цифровой ЭВМ. Для иллюстрации рассмотрим пример, раскрывающий особенности данного метода.

Пусть требуется найти коэффициенты квадратичной функции $y=a_0+a_1x+a_2x^2$, значения y_i которой при x_i приведены ниже:

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	2	3	5

Найдем $(C^TC)^{-1}$, используя (10)

$$|C^TC| = [(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)]^2 + [(x_1-x_2)(x_1-x_4)\times$$
$$\times(x_2-x_4)]^2 + [(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)]^2 +$$
$$+[(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_3-x_4)]^2 = 8\cdot 10^{-5}.$$

Определим элементы обратной матрицы (6)

$$b_{11} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;2}(x_1-x_2)^2 + \sigma^2_{1,3;2}(x_1-x_3)^2 + \sigma^2_{2,4;2}(x_2-x_4)^2 +$$
$$+\sigma^2_{1,4;2}(x_1-x_4)^2 + \sigma^2_{2,3;2}(x_2-x_3)^2 + \sigma^2_{3,4;2}(x_3-x_4)^2\} = 7{,}75,$$

где $\sigma_{i,j;2} = x_i x_j$; $b_{12} = \frac{-1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;2}\sigma_{1,2;1}(x_1-x_2)^2 +$

$$+\sigma_{1,3;2}\sigma_{1,3;1}(x_1-x_3)^2 + \sigma_{1,4;2}\sigma_{1,4;1}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;2}\sigma_{2,3;1}(x_2-x_3)^2 +$$
$$+\sigma_{2,4;2}\sigma_{2,4;1}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;2}\sigma_{3,4;1}(x_3-x_4)^2\} = -6{,}75.$$

Здесь $\sigma_{i,j;1} = x_i + x_j$; $b_{13} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;2}\sigma_{1,2;0}(x_1-x_2)^2 +$

$$+\sigma_{1,3;2}\sigma_{1,3;0}(x_1-x_3)^2 + \sigma_{1,4;2}\sigma_{1,4;0}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;2}\sigma_{2,3;0}(x_2-x_3)^2 +$$
$$+\sigma_{2,4;2}\sigma_{2,4;0}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;2}\sigma_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\} = 125,$$

где $\sigma_{i,j;0}=1$.

Поскольку C^TC — симметрическая матрица, то $b_{21}=b_{21}=-67{,}5$;

$$b_{22} = \frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;1}(x_1-x_2)^2 + \sigma^2_{1,3;1}(x_1-x_3)^2 +$$
$$+\sigma^2_{1,4;1}(x_1-x_4)^2 + \sigma^2_{2,3;1}(x_2-x_3)^2 + \sigma^2_{2,4;1}(x_2-x_4)^2 +$$
$$+\sigma^2_{3,4;1}(x_3-x_4)^2\} = 645;$$

$$b_{23} = \frac{-1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma_{1,2;1}\sigma_{1,2;0}(x_1-x_2)^2 + \sigma_{1,3;1}\sigma_{1,3;0}(x_1-x_3)^2 +$$
$$+\sigma_{1,4;1}\sigma_{1,4;0}(x_1-x_4)^2 + \sigma_{2,3;1}\sigma_{2,3;0}(x_2-x_3)^2 +$$
$$+\sigma_{2,4;1}\sigma_{2,4;0}(x_2-x_4)^2 + \sigma_{3,4;1}\sigma_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\} = -1250;$$
$$b_{31} = b_{13} = 125;\quad b_{32} = b_{23} = -1250.$$

Осталось определить

$$b_{33}=\frac{1}{8\cdot 10^{-5}}\{\sigma^2_{1,2;0}(x_1-x_2)^2+\sigma^2_{1,3;0}(x_1-x_3)^2+\sigma^2_{1,4;0}(x_1-x_4)^2+$$
$$+\sigma^2_{2,3;0}(x_2-x_3)^2+\sigma^2_{2,4;0}(x_2-x_4)^2+\sigma^2_{3,4;0}(x_3-x_4)^2\}=2500.$$

Таким образом, получаем

$$(C^T C)^{-1}=\begin{pmatrix} 7,75 & -67,5 & 125 \\ -67,5 & 645 & -1250 \\ 125 & -1150 & 2500 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя теперь обычным образом по формуле (4), имеем $a_0=0,75$; $a_1=0,5$; $a_2=25$, т. е. $y=0,75+0,5x+25x^2$.

Результаты данной статьи могут быть использованы при уравнивании геодезических сетей, когда возникают плохо обусловленные системы нормальных уравнений.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. 2. *Демидович Б. А., Марон И. А.* Численные методы анализа. — М.: Наука, 1967. 3. *Демидович Б. А., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. 4. *Хемминг Р. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1972.

Работа поступила в редколлегию 24 января 1980 года.