

от конструкций моста или на высоте не менее 50...60 см над ними.

Когда мост имеет значительный уклон, при предварительной трассировке возникает необходимость сократить длину «плеч» до 30...35 м и с помощью нивелира убедиться, что отсчеты по основным шкалам будут в пределах рабочей части рейки, т. е. в интервале 16—50 делений. Используя нивелир, во избежание грубых просчетов в разбивке «плеч», нужно проверить их длину нитяным дальномером.

Высота моста над поверхностью земли или водным зеркалом составляет не менее 8...10 м и температуры воздуха над мостом и над насыпью при подходе к нему существенно различны. В солнечную погоду разность этих температур достигает иногда 5...7°С. Поэтому рейка на насыпи, нивелир и рейка на мосту находятся в разных температурных условиях, следовательно, наблюдения на станциях при входе на мост или на выходе с него нужно выполнять при небольших разностях (не более 2...3°С) температур воздуха над насыпью и над мостом. В пасмурную погоду, при плотной облачности и малом ветре наблюдения можно выполнять практически в течение всего дня. В солнечную же погоду при температуре воздуха до 20°С работы по нивелированию I класса нужно начинать примерно через час после восхода солнца и заканчивать не позже 11 ч местного времени. Для наблюдений во вторую половину дня наиболее благоприятен период с 17 ч и за час до захода солнца. В горных районах и поймах рек период качественных изображений значительно сокращается из-за утренних и вечерних туманов, причем в солнечную погоду в утренние часы сразу после исчезновения тумана, наблюдается резкое повышение температуры воздуха, иногда на 6...7 градусов в течение часа.

Работа на станции производится в основном в соответствии с требованиями Инструкции [1], однако можно рекомендовать для контроля качества наблюдений, особенно на больших мостах, определять превышения на станции при двух горизонтах инструмента. Выполняя нивелирование I класса по большим мостам, для контроля значений превышений в прямом и обратном ходах мы практиковали использование четырех временных реперов, по два с одной и другой стороны моста.

В качестве их можно избирать достаточно устойчивые местные предметы (анкерные болты в бетонном основании светофоров, штыри в бетонных столбиках и т. д.).

Анализ выполненных работ показывает, что передача превышений через мосты при производстве нивелирования I класса, как в равнинном, так и в предгорном и горном районах, осуществлена достаточно надежно. В таблице приведены данные о качестве нивелирования по трем железнодорожным мостам в различных районах.

На трех мостах из 37 измерения превышений повторялись, причем в одном случае из-за неудачного выбора времени на-

блюдений (перед грозой), когда наблюдалось значительное изменение температуры воздуха при работе на станциях.

В двух других случаях измерения повторяли из-за вертикальных перемещений костылей в рыхлом грунте бровки при подходе к мостам.

Результаты нивелирования по железнодорожным мостам

Характеристика местности	Длина (м) и характеристика моста	Количество станции	Расхождение превышений в прямом и обратном ходе на мосту, мм
Равнинная	360, без уклона	6	+0,55
Предгорная	240, уклон до 3‰	4	-0,40
Горная	220, уклон до 30‰	5	-0,60

Список литературы: 1. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов / ГУГК, — М.: Недра, 1974. 2. Мирошник Ю. Д. Опыт нивелирования I класса в горном районе. — В сб.: 50 лет ленинского декрета об учреждении Высшего Геодезического Управления. Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1970.

Статья поступила 15 апреля 1980 г.

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН

К ИССЛЕДОВАНИЮ ФОРМУЛ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В работе [1] из решения интегрального уравнения первого рода типа Фредгольма получены формулы:

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \cos \alpha \sum_0^{\infty} \omega_m; \quad (1) \quad \omega_m = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int (t_m - t_m) \frac{d\Sigma}{r_0^3} + \frac{t_m}{4\pi a}; \quad (2)$$

$$t_0 = -2\pi \Delta g + \frac{8\pi}{\rho_0} (W_0 - U_0) - \int \Delta g F dS; \quad (3)$$

$$F = \left(\frac{3}{2r} + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2r^3} \right) \frac{\cos \alpha}{\rho_0} + \frac{\rho \sin \psi}{r^3} \sin \alpha \cos \vartheta; \quad (4)$$

$$t_1 = 0; \quad 2t_2 = \int \omega_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0}; \quad t_3 = 0;$$

$$2t_4 = \int \omega_2 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} - \frac{3}{4} \int \omega_0 v_1^4 \frac{d\Sigma}{r_0}, \dots;$$

$$r^2 = \rho^2 - \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi; r_0 = 2a \sin \frac{\psi}{2}; v_1 = \frac{H - H_0}{r_0},$$

где $\partial \Delta g / \partial n$ — производная по внешней нормали к топографической поверхности Земли от смешанных Δg аномалий силы тяжести; a — угол наклона элемента dS топографической поверхности Земли; ρ, ρ_0 — радиусы-векторы текущей и фиксированной точек поверхности Земли; θ — угол между плоскостями $r\rho$ и $r\rho_0$; ψ — угловое расстояние между текущей и фиксированной точками на поверхности S ; a — большая полуось земного эллипсоида; $d\Sigma$ — элемент сферической поверхности радиуса a ; W_0, U_0 — гравитационный потенциал Земли на уровне моря и потенциал уровня эллипсоида на его поверхности; H, H_0 — нивелирные нормальные высоты текущей и фиксированной точек поверхности Земли; r — расстояние между текущей и фиксированной точками.

Для исследования формулы (1) воспользуемся теоретической моделью Земли, применяемой в статье [2]. В качестве геоида примем эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность возьмем эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, как у эллипсоида Красовского, а малая на 100 м больше. Данная модель имеет следующие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta \beta \sin^2 \Phi; W_0 - U_0 = \frac{2}{3} a g_e \Delta \beta; \zeta = -a \Delta \alpha \sin^2 \Phi;$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \frac{2g_e}{a} [-\Delta \alpha + (\Delta \beta + 3\Delta \alpha) \sin^2 \Phi]; \quad (5)$$

$$\Delta \beta = \beta - \beta' = -0,0000158; \Delta \alpha = \alpha - \alpha' = 0,0000157,$$

где g_e — экваториальная постоянная земного ускорения; ζ — высота геоида над эллипсоидом; β, β' — коэффициенты нормальной формулы силы тяжести для двух уровневых эллипсоидов, сжатия которых α и α' ; a — большая полуось эллипсоида Красовского; Φ — геоцентрическая широта.

Заметим, что для принятой модели наклоны топографической поверхности и нивелирные высоты равны нулю, радиусы-векторы $\rho = \rho_0 = a$.

Легко показать, что для данной модели

$$F = \frac{3}{2ar_0}; t_0 = \frac{8\pi}{a} (W_0 - U_0) - \frac{8}{5} \pi g_e \Delta \beta - \frac{16}{5} \pi g_e \Delta \beta \sin^2 \Phi;$$

$$\omega = \frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \frac{2g_e}{a} \Delta \beta (1 - 2 \sin^2 \Phi), \quad (6)$$

так как

$$\int \frac{d\Sigma}{r_0} = 4\pi a, \quad \int \frac{\sin^2 \Phi'}{r_0} d\Sigma = \frac{8}{15} \pi a (4 + 3 \sin^2 \Phi),$$

$$\int (\sin^2 \Phi' - \sin^2 \Phi) \frac{d\Sigma}{r_0^3} = -\frac{4\pi}{a} \left(\sin^2 \Phi - \frac{1}{3} \right).$$

Здесь вычислили функции F, t_0 и ω по формулам (4), (3) и (2), зная аномалии силы тяжести модели Δg и разность потенциалов $W_0 - U_0$.

Сравнивая формулу (6) с формулой (5), полученной совершенно иным методом, видим, что они приводят практически к одним и тем же результатам.

В работе [3] другим путем выведены аналогичные формулы:

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} \right)_0 = -\frac{2}{a^2} (W_0 - U_0) + \frac{2\pi}{a} \omega_0 + \frac{3}{2} \int \omega_0 \frac{d\sigma}{r_0}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} \right)_1 = -a \int \omega_0 v_1 \frac{d\sigma}{r_0^2}, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} \right)_2 = \frac{2\pi}{a} (\omega_2 - \omega_0 \operatorname{tg}^2 \alpha) + \frac{3}{2} \int \left(\omega_2 - \frac{1}{2} \omega_0 v_1^2 \right) \frac{d\sigma}{r_0}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} \right)_3 = a \int \left(\frac{3}{2} \omega_0 v_1^2 - \omega_2 \right) v_1 \frac{d\sigma}{r_0^2}, \quad (10)$$

$$\omega_m = -\frac{1}{4\pi^2 a} \int (G'_m - G_m) \frac{d\sigma}{\left(2 \sin \frac{\psi}{2} \right)^3} + \frac{G_m}{4\pi a}, \quad (11)$$

$$G_0 = -a \Delta g + 2(W_0 - U_0); G_1 = 0; G_2 = \frac{1}{2} \int \omega_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0};$$

$$G_3 = 0, G_4 = \frac{1}{2} \int \omega_2 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} - \frac{3}{8} \int \omega_0 v_1^4 \frac{d\Sigma}{r_0},$$

где обозначения такие же, как и раньше; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы. Формулы (7)–(10) характеризуют отдельные приближения величины $\partial \Delta g / \partial \rho_0$.

Для принятой модели Земли вычислим функции ω_0 и $(\partial \Delta g / \partial \rho_0)_0$ по формулам (11) и (7):

$$\omega_0 = \frac{g_e \Delta \beta}{\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4} \sin^2 \Phi \right) + \frac{W_0 - U_0}{2\pi a},$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho_0} \right)_0 = \frac{g_e}{a} \Delta \beta (2 - 4 \sin^2 \Phi). \quad (12)$$

Здесь тоже использовались аномалии силы тяжести модели, разность потенциалов $W_0 - U_0$ и такие же, как и раньше, интегралы.

Формула (12) совпадает с формулой (6) и согласуется с формулой (5), которая получена иначе.

Таким образом, на основании приведенных вычислений, мы вправе заключить, что предложенные формулы (1) и (7)—(10) пригодны для практических вычислений производных от аномалий силы тяжести по внешней нормали и радиусу-вектору как для геоида, так и для топографической поверхности Земли. Связь названных производных с вертикальным градиентом силы тяжести дана в статье [2].

Список литературы: 1. Монин И. Ф. Новый метод вычисления элементов внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли. — *Астрономический журнал АН СССР*, 1966, т. 15, вып. 3. 2. Монин И. Ф. Исследование формул, определяющих вертикальные производные земного ускорения. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1978, вып. 28. 3. Монин И. Ф. Методы определения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. — Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук, Львов, 1966.

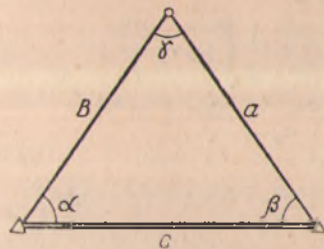
Статья поступила 11 апреля 1980 г.

УДК 528.14/16

И. И. МОНИН

ТИПОВОЕ УСЛОВНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЕТЯХ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Как известно, в сетях линейно-угловой триангуляции возникают условные уравнения, свойственные триангуляции и трилатерации. К. А. Лапинг, К. Л. Проворов и Б. Н. Рабинович*, применяя теорему синусов к треугольнику с измеренными углами и сторонами, составляли условные уравнения, свойственные сети линейно-угловой триангуляции. Они получили название синусных условных уравнений или уравнений сторон. Такие уравнения могут быть представлены в логарифмическом и в нелогарифмическом видах.



К выводу условного уравнения.

В этой статье составлено условное уравнение сети линейно-угловой триангуляции иначе, чем в работах упомянутых авторов. Оно отличается и по виду.

Для составления типового уравнения (рисунок) введем обозначения: α, β, γ — измеренные углы в треугольнике; a, b, c — измеренные стороны; $(\alpha), (\beta), (\gamma), (a), (b), (c)$ — поправки в измеренные углы и стороны, которые находят из уравнения.

* Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии. — М.: Геодиздат, 1961.

При построении сети по длинам сторон легко установить количество условных уравнений в трилатерации. Все измеренные углы при этом будут избыточными. Для каждого избыточного угла составим следующее условие:

$$\alpha + (\alpha) = \alpha_0 + (a_0), \quad (1)$$

где α_0 и (a_0) — значение угла, вычисленное по измеренным сторонам в треугольнике, и поправка в угол, найденная по поправкам в длины сторон:

$$(\alpha_0) = \frac{\rho''}{h_a} \{ (a) - \cos \gamma_0 (b) - \cos \beta_0 (c) \}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем типовое условное уравнение сети линейно-угловой триангуляции

$$\frac{\rho''}{h_a} \{ (a) - \cos \gamma_0 (b) - \cos \beta_0 (c) \} - (\alpha) + W_1 = 0, \quad (3)$$

где $W = \alpha_0 - \alpha$; h_a — высота треугольника, опущенная на сторону a , ρ'' — число секунд в радиане.

Для других углов типовые условные уравнения запишем по аналогии:

$$\frac{\rho'}{h_b} \{ (b) - \cos \gamma_0 (a) - \cos \alpha_0 (c) \} - (\beta) + W_2 = 0;$$

$$\frac{\rho''}{h_c} \{ (c) - \cos \alpha_0 (b) - \cos \beta_0 (a) \} - (\gamma) + W_3 = 0,$$

Пример. Измеренные углы: $\alpha = 65^\circ 41' 07''$; $\beta = 65^\circ 42' 40''$; $\gamma = 48^\circ 36' 16''$. Измеренные стороны: $a = 24972,70$ м; $b = 24977,79$ м; $c = 20557,11$ м.

Ищем углы, вычисленные по формулам:

$$\cos \alpha_0 = 0,41172008 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos \beta_0 = 0,41134403 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos \gamma_0 = 0,66121455 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

По значениям косинусов углов получим углы $\alpha_0 = 65^\circ 41' 05'',46$; $\beta_0 = 65^\circ 42' 38'',54$; $\gamma_0 = 48^\circ 36' 16'',00$.

Ищем свободные члены $W_1 = \alpha_0 - \alpha = -1'',54$; $W_2 = \beta_0 - \beta = -1'',46$; $W_3 = \gamma_0 - \gamma = 0$.

Вычисляем высоты $h_a = b \sin \gamma_0 = c \sin \beta_0 = 18737,38$ м; $h_b = a \sin \gamma_0 = c \sin \alpha_0 = 18733,57$; $h_c = b \sin \alpha_0 = a \sin \beta_0 = 22762,11$.