

Формула (12) совпадает с формулой (6) и согласуется с формулой (5), которая получена иначе.

Таким образом, на основании приведенных вычислений, мы вправе заключить, что предложенные формулы (1) и (7)—(10) пригодны для практических вычислений производных от аномалий силы тяжести по внешней нормали и радиусу-вектору как для геоида, так и для топографической поверхности Земли. Связь названных производных с вертикальным градиентом силы тяжести дана в статье [2].

Список литературы: 1. Монин И. Ф. Новый метод вычисления элементов внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли. — *Астрономический журнал АН СССР*, 1966, т. 15, вып. 3. 2. Монин И. Ф. Исследование формул, определяющих вертикальные производные земного ускорения. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1978, вып. 28. 3. Монин И. Ф. Методы определения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. — Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук, Львов, 1966.

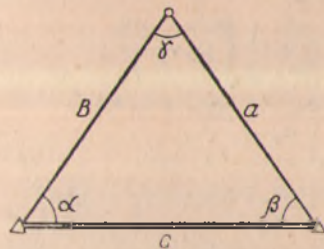
Статья поступила 11 апреля 1980 г.

УДК 528.14/16

И. И. МОНИН

ТИПОВОЕ УСЛОВНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЕТЯХ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Как известно, в сетях линейно-угловой триангуляции возникают условные уравнения, свойственные триангуляции и трилатерации. К. А. Лапинг, К. Л. Проворов и Б. Н. Рабинович*, применяя теорему синусов к треугольнику с измеренными углами



К выводу условного уравнения.

и сторонами, составляли условные уравнения, свойственные сети линейно-угловой триангуляции. Они получили название синусных условных уравнений или уравнений сторон. Такие уравнения могут быть представлены в логарифмическом и в нелогарифмическом видах.

В этой статье составлено условное уравнение сети линейно-угловой триангуляции иначе, чем в работах упомянутых авторов. Оно отличается и по виду.

Для составления типового уравнения (рисунок) введем обозначения: α, β, γ — измеренные углы в треугольнике; a, b, c — измеренные стороны; $(\alpha), (\beta), (\gamma), (a), (b), (c)$ — поправки в измеренные углы и стороны, которые находят из уравнения.

* Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии. — М.: Геодиздат, 1961.

При построении сети по длинам сторон легко установить количество условных уравнений в трилатерации. Все измеренные углы при этом будут избыточными. Для каждого избыточного угла составим следующее условие:

$$\alpha + (\alpha) = \alpha_0 + (\alpha_0), \quad (1)$$

где α_0 и (α_0) — значение угла, вычисленное по измеренным сторонам в треугольнике, и поправка в угол, найденная по поправкам в длины сторон:

$$(\alpha_0) = \frac{\rho''}{h_a} \{ (a) - \cos \gamma_0 (b) - \cos \beta_0 (c) \}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем типовое условное уравнение сети линейно-угловой триангуляции

$$\frac{\rho''}{h_a} \{ (a) - \cos \gamma_0 (b) - \cos \beta_0 (c) \} - (\alpha) + W_1 = 0, \quad (3)$$

где $W = \alpha_0 - \alpha$; h_a — высота треугольника, опущенная на сторону a , ρ'' — число секунд в радиане.

Для других углов типовые условные уравнения запишем по аналогии:

$$\frac{\rho'}{h_b} \{ (b) - \cos \gamma_0 (a) - \cos \alpha_0 (c) \} - (\beta) + W_2 = 0;$$

$$\frac{\rho''}{h_c} \{ (c) - \cos \alpha_0 (b) - \cos \beta_0 (a) \} - (\gamma) + W_3 = 0,$$

Пример. Измеренные углы: $\alpha = 65^\circ 41' 07''$; $\beta = 65^\circ 42' 40''$; $\gamma = 48^\circ 36' 16''$. Измеренные стороны: $a = 24972,70$ м; $b = 24977,79$ м; $c = 20557,11$ м.

Ищем углы, вычисленные по формулам:

$$\cos \alpha_0 = 0,41172008 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos \beta_0 = 0,41134403 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos \gamma_0 = 0,66121455 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

По значениям косинусов углов получим углы $\alpha_0 = 65^\circ 41' 05'',46$; $\beta_0 = 65^\circ 42' 38'',54$; $\gamma_0 = 48^\circ 36' 16'',00$.

Ищем свободные члены $W_1 = \alpha_0 - \alpha = -1'',54$; $W_2 = \beta_0 - \beta = -1'',46$; $W_3 = \gamma_0 - \gamma = 0$.

Вычисляем высоты $h_a = b \sin \gamma_0 = c \sin \beta_0 = 18737,38$ м; $h_b = a \sin \gamma_0 = c \sin \alpha_0 = 18733,57$; $h_c = b \sin \alpha_0 = a \sin \beta_0 = 22762,11$.

Условные уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} 1,100820[(a) - 0,41134403(c) - 0,66121455(b)] - (\alpha) + 1,54'' &= 0; \\ 1,101044[(b) - 0,41172008(c) - 0,66121455(a)] - (\beta) - 1,46'' &= 0; \\ 0,906177[(c) - 0,41172008(b) - 0,4113443(a)] - (\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения по методу наименьших квадратов, получаем значения поправок в измеренные углы и стороны:

$$\begin{aligned} (\alpha) &= -1'',362, & (\beta) &= -1'',343, & (\gamma) &= -0'',294, \\ (a) &= 0,378 \text{ дц}, & (b) &= 0,411 \text{ дц}, & (c) &= 0,000. \end{aligned}$$

Окончательные значения углов будут: $\alpha = 65^\circ 41' 05'',638$; $\beta = 65^\circ 42' 38'',657$; $\gamma = 48^\circ 36' 15'',706$.

Для контроля просуммируем углы: $\sum_{i=1}^3 i = 180^\circ 00' 00'',001$.

Условные уравнения тоже удовлетворяются.

Таким образом, имея данные измеренных сторон, вычисляем углы в треугольниках α_0 , β_0 , γ_0 и свободные члены. Затем определяем высоты в треугольниках и коэффициенты условных уравнений. Неизвестные поправки по размерности отличаются. Необходимо ввести веса. При этом важно, чтобы коэффициенты в условных уравнениях при поправках формально имели один порядок. В данном примере поправки в углы даны в секундах, а поправки в длины сторон — в дециметрах. Веса получились равными единице, а коэффициенты при поправках в углы и стороны имеют примерно одинаковый порядок. Далее, решая условные уравнения по методу наименьших квадратов, находим поправки в углы и стороны. Оценка точности выполняется обычным способом. Предложенный прием составления условных уравнений представляется нам наиболее естественным: он отражает реальную сущность линейно-угловой триангуляции.

Статья поступила 11 апреля 1980 г.

УДК 528.024.1.06

П. В. ПАВЛИВ, П. И. ПНЕВСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ НАТЯЖЕНИЯ ИНВАРНЫХ ПОЛОС НИВЕЛИРНЫХ РЕЕК НА ЗНАЧЕНИЕ ДЛИНЫ ИХ СРЕДНЕГО МЕТРА

Известно [1], что для высокоточного нивелирования применяют штриховые инварные рейки, погрешности метровых интервалов и положения всех штрихов шкалы которых при нивелировании в равнинных районах не должны превышать $\pm 0,10$ мм и $\pm 0,05$ мм при нивелировании в горных районах. Натяжение инварных полос таких реек должно составлять 20 ± 1 кг. Кроме

того, известно, что при изменении натяжения меняется длина инварной полосы. Предел пропорциональности инвара $\sigma_{ин}$ составляет 12 кг/мм^2 . Так как площадь поперечного сечения инварной полосы F с учетом ее ширины, равной 25 мм, и толщины, равной $0,6$ мм, составляет 15 мм^2 , то предел пропорциональности будет $12 \text{ кг} \cdot 15 \text{ мм}^2$, т. е. 180 кг. В свою очередь, предел прочности древесины рамы рейки (ели) при сжатии вдоль волокон составляет 423 кг/см^2 . Учитывая ширину рейки (86 мм) и толщину (40 мм) получаем предел прочности рамы рейки, который составляет $16\,666,2$ кг. Следовательно, изменение силы натяжения инварной полосы в пределах нескольких десятков килограмм не может ощутимо влиять на изменение длины рамы рейки.

Рассмотрим другой аспект этого вопроса, т. е. степень влияния изменений длины рамы рейки на изменение силы натяжения инварной полосы. Учитывая коэффициент линейного расширения древесины ели (вдоль волокон), составляющий $5,4 \cdot 10^{-6}$, длину рамы рейки $3,0$ м и изменение температуры на 10° , получаем $\Delta l_p = 3,0 \cdot 5,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^\circ \text{ C} = 0,162$ мм.

Изменение длины инварной полосы при той же температуре соответственно составит $\Delta l_n = 3,0 \text{ м} \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^\circ \text{ C} = 0,048$ мм.

Следовательно, несоответствие в изменении длин рамы рейки и инварной полосы будет в таком случае $0,114$ мм. Эту разность температурных изменений длин рамы рейки и инварной полосы компенсирует пружина. Как показали исследования, это происходит за счет изменения натяжения на десятые доли килограмма и соответственно изменения длины инварной полосы на десятые доли микрона, что находится далеко за пределами ощутимого влияния.

Известно [2], что из-за изменения силы натяжения ΔP на 1 кг один метр инварной полосы изменит свою длину на

$$\Delta L = \Delta P \left(\frac{\delta^2 \cdot S^3}{12P^3} + \frac{S}{EF} \right) = 0,0043 \text{ мм}.$$

Здесь $S = 1,0$ м — длина полосы; $P = 20$ кг — натяжение инварной полосы; $F = 25 \text{ мм} \cdot 0,6 \text{ мм} = 15 \text{ мм}^2$ — площадь поперечного сечения инварной полосы; $\delta = 0,15 \text{ см}^2 \cdot 8,11 \text{ г/м}^3 = 1,22 \text{ г/см}$ — удельное натяжение; $E = 1,6 \cdot 10^6 \text{ кг/м}$ — модуль пружинистости Юнга.

Чтобы проверить полученные результаты расчета, нами было произведено экспериментальное исследование изменения метровой длины инварной полосы при изменении ее силы натяжения на 1 кг. Для этого были проэталонированы две инварные рейки и одновременно измерена сила натяжения их инварных полос. После чего сила натяжения полос изменена на 13 и 14 кг, и снова проэталонированы рейки.

Эталонирование производили на компараторе МИИГАиК с эталоном № 541 при одной и той же температуре. Результаты измерений и вычислений приведены в таблице.