

Д. И. МАСЛИЧ, Л. С. ХИЖАК

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА РЕФРАКЦИИ ОТ ПЕРИОДА СУТОК И ВЫСОТЫ ЛУЧА

В результате обработки обширного производственного материала нами было обнаружено значительное расхождение между теоретически рассчитанной и практически получаемой точностью геодезического нивелирования. Это же отмечено и в других работах [3]. На наш взгляд, такая несогласованность вызвана не совсем точными рекомендациями относительно времени измерения зенитных расстояний, приведенных в действующей инструкции. Действительно, в инструкции сказано, что измерение зенитных расстояний можно проводить на протяжении всего светлого периода суток, исключая один-два часа до захода Солнца и два часа после его восхода. Но, как известно, переход от нормальной стратификации приземного слоя воздуха к инверсионной проходит в среднем за три часа до захода Солнца, а от инверсионной к нормальной — примерно за два часа после восхода, причем в различные дни могут быть значительные отклонения от этих средних моментов. Кроме того, в периоды, близкие к моментам перехода, происходит очень быстрое изменение вертикальных градиентов температуры, которые в основном характеризуют стратификацию атмосферы, от почти максимальных отрицательных их значений, до таких же положительных значений вечером. Утром наблюдается обратная картина. Поэтому и коэффициент рефракции претерпевает аналогичные изменения. Следовательно, придерживаясь установок инструкции, мы можем вести наблюдения в периоды, когда коэффициент принимает минимальные (даже отрицательные) и максимальные, порядка 0,5—1,0, значения. В такой ограниченности периода наблюдений и состоит их недостаток.

По нашему мнению, время суток следовало бы разделить на три периода:

1. Периоды спокойных изображений, т. е. незначительные периоды утром и вечером, в середине которых происходит выравнивание температуры и затухают колебания изображений (это периоды, в которые производят измерения горизонтальных углов). В эти периоды и происходит быстрое изменение стратификации атмосферы от нормальной к инверсионной вечером и от инверсионной к нормальной утром, что вызывает изменение коэффициента рефракции от почти максимальных отрицательных до больших положительных значений вечером. Утром аналогичные изменения происходят в противоположном направлении, причем в момент, когда начинаются спокойные изображения, значение коэффициента рефракции стабильно (0,160).

2. Дневной период — между концом утреннего и началом вечернего периодов спокойных изображений. Здесь в весеннее, летнее и осен-



нее время преобладает нормальная стратификация атмосферы, за исключением случаев, когда над районом наблюдения происходит изменение погоды. Коэффициенты рефракции в указанном периоде могут изменяться от отрицательных значений до значения коэффициента рефракции, соответствующего равновесным условиям (около 0,160). Здесь мы говорим об изменении коэффициента рефракции для расстояний 4—20 км. Для расстояний, меньших 4 км, коэффициент рефракции может принимать и отрицательные значения порядка  $-3,0$ . В зимнее время в дневном периоде очень часто может наблюдаться инверсионное строение атмосферы, которое и вызывает увеличение коэффициента рефракции по сравнению с величиной коэффициента рефракции в весеннее, летнее и осеннее время дневного периода. В зимнее время очень часто может и не быть периодов спокойных изображений, так как инверсионное строение атмосферы может иметь место круглые сутки. Правда, в некоторые дни период спокойных изображений существует в полуденное время.

3. Ночной период, заключенный между концом вечернего и началом утреннего периодов спокойных изображений. В этот период суток круглый год преобладает инверсионное строение атмосферы, причем мощность инверсионного слоя и величины его параметров могут сильно меняться от одного дня к другому. Коэффициенты рефракции могут принимать очень большие значения для низких лучей (0,1 и больше) и нормальные значения для высоких лучей (около 0,160). Кроме того, величина коэффициента рефракции от одного дня к другому для одного и того же направления может также сильно изменяться. Известны случаи, когда в этот период коэффициент рефракции для одного и того же направления в один день принимал значения 0,16, а в другой —  $+2,0$ .

Здесь следует заметить, что границы указанных выше периодов нельзя определить предварительно по местному времени. Величины периодов и время их установления для различных суток и различных периодов года различны. Однако для определения начала и конца каждого периода можно использовать интенсивность колебаний изображений. Поэтому за начало дневного периода можно принять время, когда колебания изображений начинают резко увеличиваться, а за конец — время, когда колебания изображений начинают затухать.

Таким образом, в смысле повышения точности геодезического нивелирования наиболее подходящи периоды спокойных изображений и дневной период. Ночной период можно считать непригодным для выполнения геодезического нивелирования в производственных условиях, так как величина коэффициента рефракции очень сильно изменяется как от направления к направлению, так и от дня ко дню, причем в настоящее время нет методики, которая позволила бы учесть эти изменения. Детальное исследование точности геодезического нивелирования в периоды спокойных изображений дано в работе [1]. В этой же работе показано, что, выполняя по определенной методике измерения зенитных расстояний в периоды спокойных изображений, можно достичь такой точности геодезического нивелирования, какую мы получаем при геометрическом нивелировании IV класса. Что же касается дневного периода, то здесь следует отметить зависимость коэффициента рефракции от высоты линии визирования (эквивалентной высоты), которая в геодезической литературе детально не исследована.

Для изучения этого вопроса нами был обработан методами математической статистики большой экспериментальный материал, полученный сотрудниками лаборатории Львовского политехнического института. Эти работы проводились на четырех участках: во всхолмлен-



ном районе, в южном степном районе, в районе Западно-Сибирской низменности и в районе Заполярья.

О количестве материала, принятого в обработку, можно судить по данным, приведенным в табл. 1. Наблюдения проводились на протяжении всего светлого периода суток через каждый час, примерно по оди-

Таблица 1

Характеристика результатов экспериментальных работ

Измеряемые пункты	$h_3, м$	$S, км$	$n$	Колич. дней	$k_0$	$\sigma_0$
<i>Южный степной район</i>						
Пункт I						
II	14,8	6,6	38	11	0,031	0,043
I	15,3	6,1	86	11	0,053	0,056
2	9,1	5,2	86	11	-0,032	0,088
3	12,7	4,7	86	11	0,072	0,063
Пункт II						
I	9,4	6,6	42	11	-0,010	0,108
2	12,5	11,6	36	11	0,039	0,070
3	7,0	6,0	24	11	-0,031	0,023
4	10,3	5,7	64	11	0,011	0,115
<i>Район Западно-Сибирской низменности</i>						
Пункт III						
IV	22,0	6,4	118	14	0,179	0,037
V	26,4	8,1	105	14	0,177	0,030
Пункт IV						
III	24,0	6,4	117	14	0,154	0,041
V	33,7	7,7	116	14	0,168	0,034
Пункт V						
III	21,6	8,1	36	4	0,138	0,026
IV	29,5	7,7	28	4	0,136	0,038
<i>Всхолмленный район</i>						
Пункт VI						
VIII	35,6	9,5	81	15	0,181	0,022
VII	32,7	9,0	83	15	0,168	0,021
5	31,9	10,7	31	15	0,163	0,023
6	22,0	9,8	62	15	0,155	0,021
7	28,4	9,3	63	15	0,138	0,029
Пункт VII						
VI	38,7	9,0	60	14	0,103	0,026
VIII	12,5	5,8	63	14	0,070	0,052
8	24,1	10,1	37	14	0,132	0,024
9	27,5	20,0	29	14	0,116	0,039
Пункт VIII						
VII	38,7	9,0	101	15	0,076	0,059
VI	22,1	9,5	79	15	0,123	0,034
10	27,2	7,0	74	15	0,135	0,032
11	10,2	5,1	103	15	0,128	0,061
<i>Район Заполярья</i>						
Пункт IX						
12	9,2	8,6	43	12	0,092	0,067
X	10,4	3,9	57	12	0,043	0,105
Пункт X						
IX	7,9	3,9	19	3	-0,057	0,097
12	10,4	5,6	16	3	0,011	0,242
13	13,4	6,3	18	3	0,074	0,147

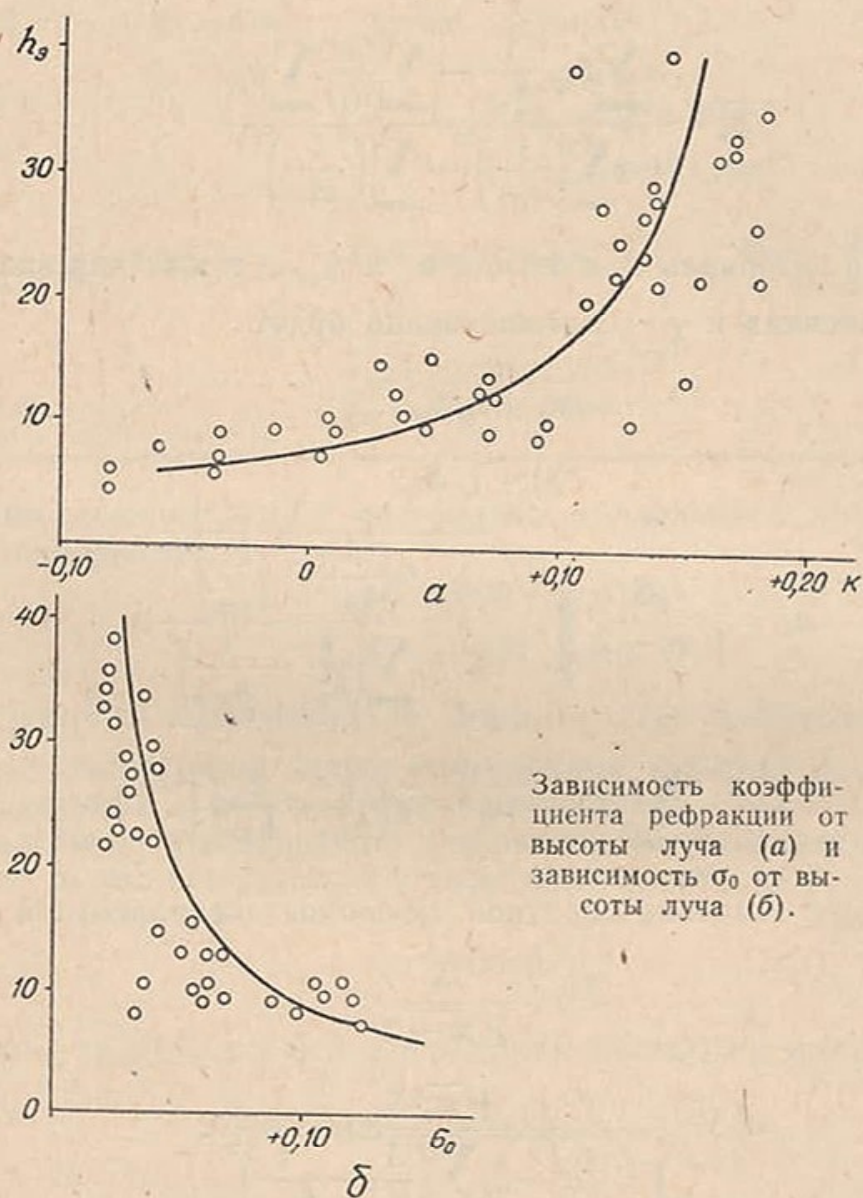


наковой программе. Наблюдения осуществлялись в течение нескольких дней при различных условиях погоды четырьмя приемами. В первую очередь нами были вычислены средние значения  $k_0$  и  $\sigma_0$  для каждого направления:

$$k_0 = \sum_{i=1}^n p_i^* k_{0,i}; \quad (1)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum (k_{0,i} - k_0)^2 p_i^*}, \quad (2)$$

где  $p_i^*$  — частота появления  $k$  в  $i$ -том разряде;  
 $k_{0,i}$  — представитель  $i$ -того разряда.



Количество разрядов зависело от количества коэффициентов, имеющих для данного направления, и колебалось от 5 до 17. Величины  $k_0$  и  $\sigma_0$  для каждого направления приведены в последних столбцах табл. 1. По этим значениям были построены графики зависимости от высоты величин  $k_0$  (см. рисунок а) и  $\sigma_0$  (см. рисунок б). На первом графике кружками показаны значения  $k_0$ , вычисленные по формуле (1), на втором — значения  $\sigma_0$ , вычисленные по формуле (2). Как видим, существует явная зависимость и коэффициента рефракции, и средне-



квадратического отклонения от высоты  $h_{\text{э}}$ , причем значение  $k_0$  изменяется с высотой от  $-0,10$  до  $+0,17$ , а величина  $\sigma_0$  — от  $0,02$  до  $0,15$ .

Нетрудно заметить, что зависимость коэффициента рефракции от высоты можно представить в виде

$$k = \alpha_k + \beta_k \frac{1}{h_{\text{э}}} \quad (3)$$

Применяя к зависимости (3) регрессионный анализ, оценки  $\bar{\alpha}_k$  и  $\bar{\beta}_k$  коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  получим из следующих формул [2]:

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\sum k_{oj}}{n}; \quad (4)$$

$$\bar{\beta}_k = \frac{n \sum k_{oj} \frac{1}{h_{\text{э}j}} - \sum \frac{1}{h_{\text{э}j}} \sum k_{oj}}{n \sum \left(\frac{1}{h_{\text{э}j}}\right)^2 - \sum \left(\frac{1}{h_{\text{э}j}}\right)^2}. \quad (5)$$

Доверительные интервалы для оценок  $\bar{\alpha}_k$  и  $\bar{\beta}_k$ , а также для значения  $\bar{k}_0$  при данных оценках и  $\frac{1}{h_{\text{э}0}}$  соответственно будут

$$\bar{\alpha}_k \pm t_q S_{\alpha}; \quad (6)$$

$$\bar{\beta}_k \pm t_q S_{\beta}; \quad (7)$$

$$\bar{k}_0 = \frac{t_q S}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \frac{n \left(\frac{1}{h_{\text{э}0}} - \frac{1}{h_{\text{э}cp}}\right)^2}{\sum \left(\frac{1}{h_{\text{э}j}} - \frac{1}{h_{\text{э}cp}}\right)^2}}, \quad (8)$$

где

$$S = \frac{1}{n} \sum \left[ k_{oj} - \bar{\alpha}_k - \bar{\beta}_k \left( \frac{1}{h_{\text{э}j}} - \frac{1}{h_{\text{э}0}} \right) \right]^2, \quad (9)$$

а  $\frac{1}{h_{\text{э}cp}}$  — среднее значение обратной величины эквивалентной высоты;

$$S_{\alpha} = \frac{S}{\sqrt{n-2}}; \quad (10)$$

$$S_{\beta} = \frac{\sqrt{n} \cdot S}{\sqrt{(n-2) \sum \left(\frac{1}{h_{\text{э}j}} - \frac{1}{h_{\text{э}cp}}\right)^2}}; \quad (11)$$

$t_q$  — аргумент распределения Стьюдента при  $q$ -процентном уровне значимости.

Вычисления  $\bar{\alpha}_k$ ,  $\bar{\beta}_k$ ,  $\bar{k}_0$ , а также доверительных интервалов для этих значений приведены в табл. 2. Таким образом, для значения  $\bar{k}_0$  окончательно получим

$$\bar{k}_0 = 0,090 - 1,517 \left( \frac{1}{h_{\text{э}j}} - \frac{1}{h_{\text{э}cp}} \right). \quad (12)$$



## Результаты вычислений коэффициентов уравнений и доверительных интервалов

$$\begin{aligned}\bar{a}_k &= 0,090 \\ \bar{\beta}_k &= -1,252 \\ \bar{a}_k &= 0,090 \pm 0,016 \\ \bar{\beta}_k &= -1,517 \pm 1,078\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_\sigma &= 0,063 \\ \bar{\beta}_\sigma &= 0,858 \\ \bar{a}_\sigma &= 0,063 \pm 0,008 \\ \bar{\beta}_\sigma &= 0,858 \pm 0,100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_0 &= 0,090 - 1,517 \left( \frac{1}{h_3} - 0,068 \right) \\ \bar{\kappa}_0 &= 0,193 - 1,517 \frac{1}{h_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_0 &= 0,063 + 0,858 \left( \frac{1}{h_3} - 0,068 \right) \\ \bar{\sigma}_0 &= 0,005 + 0,858 \frac{1}{h_3}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{h_3} = 0,025$$

$$h_3 = 40 \text{ м}$$

$$q = 5\%$$

$$\bar{\kappa}_0 = 0,155$$

$$\bar{\sigma}_0 = 0,026$$

$$\bar{\kappa}_{0,5} = 0,155 \pm 0,025$$

$$\bar{\sigma}_{0,5} = 0,026 \pm 0,012$$

$$\frac{1}{h_3} = 0,200$$

$$h_3 = 5 \text{ м}$$

$$q = 5\%$$

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}_0 &= -0,110 \\ \bar{\sigma}_0 &= 0,177\end{aligned}$$

$$\bar{\kappa}_{0,5} = -0,110 \pm 0,062$$

$$\bar{\sigma}_{0,5} = 0,177 \pm 0,037$$

Величины доверительных интервалов вычислялись при 5-процентном уровне значимости

$$\bar{a}_k = 0,090 \pm 0,016; \quad (13)$$

$$\bar{\beta}_k = -1,517 \pm 1,078. \quad (14)$$

Результаты вычислений по формуле (12) показаны на рисунке а сплошной линией. Как видно, вычисленные значения  $\bar{k}_0$  довольно хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Аналогично коэффициенту рефракции  $k_0$  среднеквадратическое отклонение  $\sigma_0$  мы представили в виде зависимости

$$\sigma_0 = a_\sigma + \beta_\sigma \frac{1}{h_3}. \quad (15)$$

Решая задачу, как и в предыдущем случае, мы получили

$$\bar{\sigma}_0 = 0,063 + 0,858 \left( \frac{1}{h_{3j}} - \frac{1}{h_{3, \text{ср}}} \right); \quad (16)$$

$$\bar{a}_\sigma = 0,063 \pm 0,008; \quad (17)$$

$$\bar{\beta}_\sigma = 0,858 \pm 0,100. \quad (18)$$

Результаты вычислений приведены в правой части табл. 2. Кроме того, по формуле (8) были подсчитаны максимальные значения доверительного интервала для величины  $\bar{k}_0$ , причем значение  $h_{3,0}$  принималось равным 5 м (практически минимальное значение эквивалентной высоты, табл. 2). Аналогично были вычислены и максимальные значе-



ния доверительного интервала для  $\sigma_0$  (табл. 2). Для сравнения в этой же таблице приведены значения доверительных интервалов для  $\bar{k}_0$  и  $\bar{\sigma}_0$  при  $h_{э0} = 40$  м.

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что величина коэффициента рефракции в приземном слое воздуха очень сильно зависит от эквивалентной высоты. В слое воздуха от 5 до 40 м величина коэффициента рефракции в дневной период изменяется от  $-0,110$  до  $+0,155$ . А поэтому при пользовании средним значением коэффициента в результате нивелирования вносятся значительные погрешности. Кроме того, величина средней квадратической ошибки определения  $k$ , вызванная изменением коэффициента рефракции с изменением времени, также зависит от эквивалентной высоты. Так, как показывают наши материалы, средняя квадратическая ошибка для лучей, имеющих эквивалентную высоту 5 м, составляет  $\pm 0,177$ , т. е. больше среднего значения самого коэффициента рефракции, а для эквивалентной высоты, равной 40 м, эта ошибка равна  $\pm 0,026$  м, т. е. примерно в 7 раз меньше средней квадратической ошибки для  $h_э = 5$  м.

Таким образом, при обработке результатов геодезического нивелирования, а также для предвычисления его точности необходимо так или иначе учитывать высоту прохождения визирного луча над подстилающей поверхностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джуман Б. М. О точности измерения зенитных расстояний в периоды спокойных изображений при ветре. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4. Изд-во Львов. ун-та, 1966.
2. Смирнов Н. В. и Дунин-Барковский И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. М., 1959.
3. Петрашевич Г. Г. О точности определения коэффициента рефракции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7, 1968.

Работа поступила  
13 апреля 1968 г.