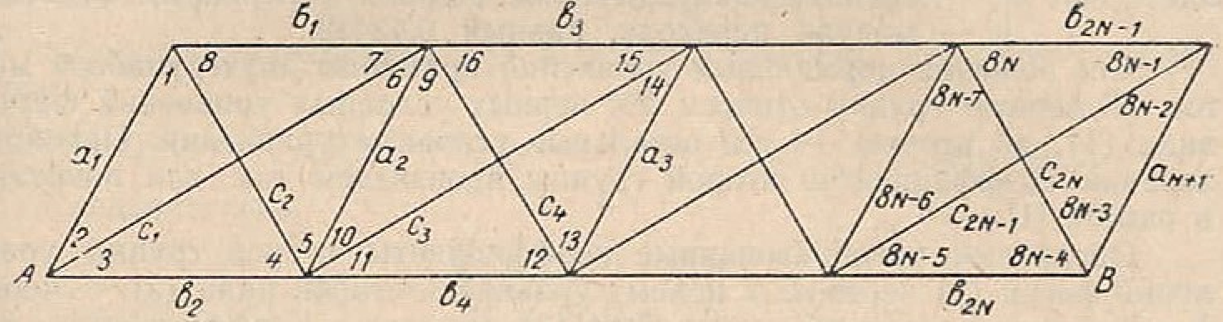
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 10

УДК 528. 33/35

В. П. НОВОСЕЛЬСКАЯ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РОМБОВ

В ряде (рисунок), состоящем из правильных ромбов, измерены все углы и стороны. Формулы для оценки точности различных элементов сети, являющихся функциями измеренных величин, находят примене-



нием способа наименьших квадратов, откуда известно, что средняя квадратическая ошибка функции уравновешенных величин будет

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}},$$

где μ — ошибка единицы веса;

P_F — вес рассматриваемой функции.

Ниже приведены выводы формул для значений обратных весов функций дирекционного угла последней стороны ряда, длины и направления диагонали AB ряда. В свободном ряде, состоящем из ромбов и строго ориентированном по координатным осям, при уравнивании по методу условных измерений возникает $3N$ условных уравнений фигур (N — число ромбов в ряде) вида

$$(8i-7) + (8i-6) + (8i-5) + (8i-4) + w_1 = 0; \qquad (1)$$

$2N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{8i-7}(8i-7) - \delta_{8i-4}(8i-4) + (\lg a_i) - (\lg b_{2i}) + w_2 = 0 \qquad (2)$$

и $4N$ уравнений сторон вида

$$\delta_{(8i-6)+(8i-5)}(8i-6) + \delta_{(8i-6)+(8i-5)}(8i-5) - \delta_{8i-7}(8i-7) + (\lg b_{2i}) - (\lg c_{2i}) + w_3 = 0, \qquad (3)$$

где i — порядковый номер ромба;

$(8i)$, $(\lg a)$, $(\lg b)$, $(\lg c)$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам и логарифмам длин сторон;

δ — приращение логарифма синуса угла при изменении угла на $1''$;

w — свободный член условных уравнений.

Коэффициентами при поправках в углы являются приращения логарифмов синусов углов при изменении углов на $1''$. Так как в правильном ромбе углы равны 30°, 60°, 120° и $\delta_{30^\circ} = 3{,}66$, $\delta_{60^\circ} = 1{,}22$, $\delta_{120^\circ} = -1{,}22$, то все коэффициенты при поправках в углы можно выразить через $\delta_{60^\circ} = \delta$:

$$\delta_{30^\circ} = 3\,\delta_{60^\circ} = 3\,\delta.$$

Для совместного уравновешивания измеренных углов и сторон необходимо установить соотношение размеров угловых и линейных поправок при помощи весов. В работе [2] показано, что при уравнивании можно принять $P_\beta = 1$,

$$P_{\lg s} = \frac{1}{q}, \text{ где } q = \frac{1}{P_{\lg s}} = \left(\frac{10^6 \mu \cdot m_s}{m_\beta \cdot s}\right)^2.$$

Здесь m_β, m_s — средние квадратические ошибки измеренных величин;
μ — модуль перехода, равный 0,43429... .

Для решения нормальных уравнений применим двухгрупповой метод. В первую группу отнесем $2N$ первых условных уравнений фигур вида (1), во вторую — все остальные условные уравнения. Преобразование коэффициентов второй группы произведем так, как показано в работе [1].

Обозначим преобразованные коэффициенты второй группы уравнений фигур (1) через a, N первых уравнений сторон ряда (2) — через b и N первых уравнений сторон вида (3) — через c. Коэффициенты в весовых функциях обозначим через f_α, f_L и f_T.

Из решения нормальных уравнений найдем квадратичные коэффициенты эквивалентной системы. Уравнения вида (1) не имеют общих поправок, поэтому

$$[a_1 a_1] = [a_2 a_2 \cdot 1] = \cdots = [a_N a_N \cdot (N-1)] = 2.$$

Для N первых уравнений (2) имеем

$$[b_1 b_1 \cdot N] = [b_2 b_2 \cdot (N+1)] = \cdots = [b_N b_N \cdot (2N-1)] = 1{,}5\,\delta^2 + 2q.$$

N первых уравнений (3) также не имеют общих поправок между собой, следовательно,

$$[c_1 c_1 \cdot 2N] = [c_2 c_2 \cdot (2N+1)] = [c_3 c_3 \cdot (2N+2)] = \cdots$$
$$\cdots = [c_N c_N \cdot (3N-1)] = 2{,}25\,\delta^2 + 1{,}5q.$$

Для определения веса уравненных величин используем формулу обратного веса, которую запишем следующим образом:

$$\frac{1}{P_f} = [ff] - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7), \tag{4}$$

где $[ff]$ — квадратичный коэффициент соответствующей функции;
$Q_1\, Q_2$, Q_3 и т. д. — значения величин, вносимых условными уравнениями фигур и сторон второй группы в обратные веса функций.

Обратный вес дирекционного угла связующей стороны ряда. Весовую функцию дирекционного угла связующей стороны ромба с номером $i - 1$ запишем так:

$$d\alpha_i = +(2) - (6) + (10) - (14) + \ldots + (8i-6) - (8i-2). \quad (5)$$

Квадратичный коэффициент для весовой функции дирекционного угла имеет значение

$$[f_\alpha f_\alpha] = \frac{3}{2} N. \quad (6)$$

Определим величины Q_1, Q_2, Q_3 и т. д. Условные уравнения фигур (1) второй группы с весовой функцией дирекционного угла дают следующие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[a_1 f_\alpha] = [a_2 f_\alpha \cdot 1] = \cdots = [a_i f_\alpha \cdot (i-1)] = -1.$$

Для N первых уравнений вида (2) и весовой функции дирекционного угла

$$[b_1 f_\alpha \cdot N] = [b_2 f_\alpha \cdot (N+1)] = \cdots = [b_i f_\alpha \cdot (N+i-1)] = -0{,}5\,\delta.$$

N первых уравнений вида (3) и весовая функция образуют коэффициенты

$$[c_1 f_\alpha \cdot 2N] = [c_2 f_\alpha \cdot (2N+1)] = \cdots = [c_i f_\alpha \cdot (2N+i-1)] = +0{,}75\,\delta.$$

Следовательно,

$$Q_1 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[a_i f_\alpha \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = 0{,}5\,N; \quad (7)$$

$$Q_2 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[b_i f_\alpha \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (N+i-1)]} = \frac{0{,}25\,\delta^2}{1{,}5\,\delta^2 + 2q} N; \quad (8)$$

$$Q_3 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[c_i f_\alpha \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2N+i-1)]} = \frac{0{,}5625\,\delta^2}{2{,}25\,\delta^2 + 1{,}5q} N. \quad (9)$$

Выражения для Q_4, Q_5, Q_6 и Q_7 получаются очень громоздкими, и лучше их выразить через Q_2 и Q_3. При $\frac{1}{300\,000} < \frac{m_s}{m_\beta \cdot s} < \frac{1}{100\,000}$ и любом N с достаточной точностью соблюдается равенство

$$Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 = 2(Q_2 + Q_3). \quad (10)$$

Зная величины (6), (7), (8), (9) и (10), получим приближенную формулу для обратного веса дирекционного угла связующей стороны цепи

$$\frac{1}{P_\alpha} = N - \frac{0{,}375\,\delta^2 N}{0{,}75\,\delta^2 + q} - \frac{1{,}125\,\delta^2 \cdot N}{1{,}5\,\delta^2 + q}. \quad (11)$$

Продольный сдвиг ряда. Весовую функцию длины диагонали AB ряда запишем так:

$$(i \cdot 10^6 \mu) \frac{dL}{L} = (\lg b_2) + (\lg b_4) + (\lg b_6) + \ldots + (\lg b_{2i}) \quad (12)$$

Квадратичный коэффициент для весовой функции длины диагонали имеет вид

$$[f_L f_L] = qN. \tag{13}$$

Условные уравнения фигур второй группы (1) и сторон (2) и (3) с весовой функцией длины диагонали образуют следующие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[a_1 f_1] = [a_2 f_L \cdot 1] = \cdots = [a_i f_L \cdot (i-1)] = 0;$$

$$[b_1 f_L \cdot N] = [b_2 f_L \cdot (N+1)] = \cdots = [b_i f_L \cdot (N+i-1)] = -q;$$

$$[c_1 f_L \cdot 2N] = [c_2 f_L \cdot (2N+1)] = \cdots = [c_i f_L \cdot (2N+i-1)] = 0{,}5q.$$

Следовательно, величины, которые вносят эти уравнения в обратный вес функции длины диагонали, будут такими:

$$Q_1 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[a_i f_L \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = 0; \tag{14}$$

$$Q_2 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[b_i f_L \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (N+i-1)]} = \frac{q^2}{1{,}5\,\delta^2 + 2q} N; \tag{15}$$

$$Q_3 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[c_i f_L \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2N+i-1)]} - \frac{0{,}25\,q^2}{2{,}25\,\delta^2 + 1{,}5q} N. \tag{16}$$

Для величин Q_4, Q_5, Q_6 и Q_7 с хорошей точностью соблюдается равенство при любом N.

$$Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 = 0{,}2(Q_2 + Q_3). \tag{17}$$

Зная величины (13), (14), (15), (16) и (17), получим приближенную формулу обратного веса длины диагонали ряда

$$\frac{1}{P_L} = \left(q - \frac{0{,}6q^2}{0{,}75\,\delta^2 + q} - \frac{0{,}2\,q^2}{1{,}5\,\delta^2 + q}\right) \frac{1}{N} \left(\frac{L}{10^6\,\mu}\right)^2. \tag{18}$$

Поперечный сдвиг ряда. Весовую функцию направления диагонали AB ряда запишем следующим образом:

$$i \cdot dT'' = i(2) + i(3) + (i-1)(4) + (i-1)(5) + \ldots + (8i-6) + (8i-5) \tag{19}$$

Квадратичный коэффициент для весовой функции направления диагонали ряда имеет вид

$$[f_T f_T] = \frac{N}{4}(2N^2 - N + 3). \tag{20}$$

Условные уравнения фигур второй группы (1) и сторон (2) и (3) с весовой функцией направления диагонали ряда образуют следующие коэффициенты эквивалентной системы:

$$[a_1 f_T] = N - 1; \qquad [b_1 f_T \cdot N] = -0{,}5\,\delta(N-1);$$

$$[a_2 f_T 1] = N - 2; \qquad [b_2 f_T \cdot (N+1)] = -0{,}5\,\delta(N-2);$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[a_i f_T \cdot (i-1)] = N - i; \quad [b_i f_T \cdot (N+i-1)] = -0{,}5\,\delta(N-i);$$

$$[c_1 f_T \cdot (2N)] = 0{,}75\,\delta(N+1);$$

$$[c_2 f_T \cdot (2N+1)] = 0{,}75\,\delta N;$$

$$[c_3 f_T \cdot (2N+2)] = 0{,}75\,\delta(N-1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[c_i f_T \cdot (2N+i-1)] = 0{,}75\,\delta(N-i+2)].$$

Величины, которые вносят эти уравнения в обратный вес направления диагонали ряда, такие:

$$Q_1 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[a_i f_T \cdot (i-1)]^2}{[a_i a_i \cdot (i-1)]} = 0{,}5\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - N^2\right]; \quad (21)$$

$$Q_2 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[b_i f_T \cdot (N+i-1)]^2}{[b_i b_i \cdot (N+i-1)]} = \frac{0{,}25\,\delta^2}{1{,}5\,\delta^2 + 2q}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - N^2\right]; \quad (22)$$

$$Q_3 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{[c_i f_T \cdot (2N+i-1)]^2}{[c_i c_i \cdot (2N+i-1)]} =$$

$$= \frac{0{,}5625\,\delta^2}{2{,}25\,\delta^2 + 1{,}5q}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + N^3 + 2N\right]. \quad (23)$$

Величины Q_4, Q_5 Q_6 и Q_7 выразим через Q_2 и Q_3. Для этих величин с достаточной точностью соблюдается равенство

$$Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7 = Q_2 + Q_3 \quad (24)$$

Зная (20), (21), (22), (23) и (24), получим приближенную формулу обратного веса для направления диагонали ряда

$$\frac{1}{P_T} = \frac{1}{4N}(2N^2 - N + 3) - \frac{1{,}5\,\delta^2}{1{,}5\,\delta^2 + q}\left(1 + \frac{1}{N}\right) -$$

$$-\left(0{,}5 + \frac{0{,}25\,\delta^2}{0{,}75\,\delta^2 + q} + \frac{0{,}75\,\delta^2}{1{,}5\,\delta^2 + q}\right)\left[\frac{(N+1)(2N+1)}{6N} - 1\right]. \quad (25)$$

О точности полученных формул (11), (18) и (25) свидетельствует таблица, в которой приведены значения обратных весов для соответствующих функций, полученных путем строгого решения задачи (из решения схемы Гаусса) и по предложеннным формулам. При решении примеров по схеме Гаусса мы принимали, что число ромбов $N=1$, 2, 3 и 5; $m_\beta = 1''$;

$$\frac{m_s}{s} = \frac{1}{100\,000}, \quad \frac{1}{200\,000} \text{ и } \frac{1}{300\,000}$$

Величины обратных весов $\frac{1}{P_\alpha}$, $\frac{1}{P_L}$ и $\frac{1}{P_T}$, полученных из решения схемы Гаусса, сравнены соответственно с обратными весами, определенными по формулам (11), (18) и (25). Как видно из таблицы, погрешности обратных весов, вычисленных по формулам, невелики и этими формулами можно пользоваться при оценке точности сетей.

Величины и точность обратных весов

	$N=1$ $\frac{m_s}{m_\beta \cdot s}=\frac{1}{200000}$	$N=3$ $\frac{m_s}{m_\beta \cdot s}=\frac{1}{200000}$	$N=5$ $\frac{m_s}{m_\beta \cdot s}=\frac{1}{200000}$	$N=2$ $\frac{m_s}{m_\beta \cdot s}=\frac{1}{100000}$	$N=3$ $\frac{m_s}{m_\beta \cdot s}=\frac{1}{300000}$
Для функции дирекционного угла					
$\frac{1}{P_\alpha}$ по схеме Гаусса	0,64	1,89	3,13	1,64	1,47
$\frac{1}{P_\alpha}$ по формуле	0,66	1,99	3,32	1,79	1,32
Погрешность, %	3,1	5,2	6,0	9,1	10,2
Для функции длины диагонали					
$\frac{1}{P'_L}$ по схеме Гаусса	1,92	5,28	8,61	9,82	3,09
$\frac{1}{P'_L}$ по формуле	1,79	5,37	8,95	9,60	3,22
Погрешность, %	6,7	1,7	3,9	2,2	4,2
Для функции направления диагонали					
$\frac{1}{P_T}$ по схеме Гаусса	0,57	0,62	0,97	0,73	0,46
$\frac{1}{P_T}$ по формуле	0,36	0,67	1,15	0,82	0,33
Погрешность, в %	36,0	8,0	18,0	12,1	28,0

Примечание. $\frac{1}{P'_L}=\left(\frac{10^6 \cdot \mu \cdot N}{L}\right)^2 \frac{1}{P_L}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новосельская В. П. Точность цепи линейно-угловой триангуляции. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 1. Изд-во Львов. ун-та, 1964.

2. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 3, 1959.

Работа поступила
11 мая 1968 г.