

ДИСКУССИИ И РЕЦЕНЗИИ

И. Ф. МОНИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФИГУРЫ И ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к теории определения внешнего гравитационного поля и фигуры топографической поверхности Земли.

1. В 1960 г. М. С. Молоденский [3] предложил оригинальный метод решения интегрального уравнения относительно плотности потенциала простого слоя, посредством которого, согласно его теории, определяется фигура топографической поверхности Земли и ее внешнее гравитационное поле. Сущность метода состоит в следующем.

Путем введения малого параметра преобразуется вспомогательная поверхность, в качестве которой принимается близкая к поверхности Земли поверхность, получаемая отложением от отсчетного эллипсоида нормальных высот.

Для преобразованной поверхности записывается аналогичное интегральное уравнение, составленное для вспомогательной поверхности. Полагая, что решение интегрального уравнения разлагается в бесконечный ряд по степеням малого параметра, легко разложить все члены уравнения в аналогичные ряды и получить бесконечную систему интегральных уравнений, разрешимых при помощи сферических функций.

Интегральное уравнение М. С. Молоденского содержит смешанную аномалию силы тяжести $\Delta g = g - \gamma$, в которой g — сила тяжести, измеренная на топографической поверхности Земли, а γ — нормальная сила тяжести, вычисленная по данным уровенного эллипсоида для точек вспомогательной поверхности.

Очевидно, что в уравнении М. С. Молоденского, написанном по аналогии для преобразованной близкой поверхности, смешанная аномалия Δg должна претерпеть изменение. В этом легко убедиться, составив граничное условие для возмущающего потенциала и затем интегральное уравнение относительно плотности потенциала простого слоя непосредственно для преобразованной поверхности. М. С. Молоденский сохранил Δg без изменений, не дав этому никакого обоснования. Это неясное место в его методе не нашло своего объяснения и в современных учебниках [1, 2].

В статьях [4, 5] выполнено решение интегрального уравнения М. С. Молоденского с учетом изменения аномалий силы тяжести. Вычислим высоты квазигеоида на модели по формулам, полученным в статьях [4, 5], и по формулам М. С. Молоденского [3].

Пусть отсчетной поверхностью модели является уровенный эллипсоид Красовского, нормальная сила тяжести на котором

$$\gamma_0 = g_e \{ 1 + [\beta + 4(\alpha\beta - \beta_1)] \sin^2 \Phi - 4(\alpha\beta - \beta_1) \sin^4 \Phi \},$$

где g_e , β , β_1 — известные постоянные нормальной формулы для эллипсоида Красовского;

α — его сжатие;

Φ — геоцентрическая широта.

В качестве топографической поверхности модели примем уровенный эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая — на 10 км больше, чем в эллипсоиде Красовского. С точностью малых величин третьего порядка сила тяжести на топографической поверхности

$$g_{\partial} = g_e \{ 1 + [\beta' + 4(\beta'a_2 - \beta_1')] \sin^2 \Phi - 4(\beta'a_2 - \beta_1') \sin^4 \Phi \},$$

где g , β' , β_1' — аналогичные величины для уровенного эллипсоида с полуосями a и $b + 10$ км;

α_2 — его сжатие.

Массы уровенных эллипсоидов можно подобрать так, чтобы экваториальная постоянная силы тяжести g_e была одинакова. Геоцентрические широты этих эллипсоидов, как легко проверить, отличаются на малые величины второго порядка. Примем в качестве вспомогательной поверхности эллипсоид с полуосями a и $b + 10$ км — 100 м, сжатие которого α_1 . С точностью малых величин третьего порядка нормальные высоты модели определяются по формуле:

$$H = a \left\{ \left[\alpha - \alpha_1 + \frac{3}{2} (\alpha^2 - \alpha_1^2) \right] \sin^2 \Phi - \frac{3}{2} (\alpha^2 - \alpha_1^2) \sin^4 \Phi \right\}.$$

С той же точностью аномалии силы тяжести для данной модели определяются так:

$$\Delta g = g - \gamma = g - \gamma_0 - H \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma} - \frac{H^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \gamma^2} = g_e (c_1 \sin^2 \Phi + c_2 \sin^4 \Phi), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \beta' + 4(\beta'a_2 - \beta_1') - \beta - \\ &- 4(\alpha\beta - \beta_1) + 2(\alpha - \alpha_1) \left(1 + q + \frac{5}{2} \alpha - \frac{3}{2} \alpha_1 \right) = 0,0064716, \\ c_2 &= -4(\beta'a_2 - \beta_1') + 4(\alpha\beta - \beta_1) + 2(\alpha - \alpha_1) \left(\beta - \frac{7}{2} \alpha - \frac{3}{2} \alpha_1 \right) - \\ &- 3(\alpha - \alpha_1)^2 = 0,0000013. \end{aligned}$$

где

$$\Delta g_0 = g - \gamma_0 = g_e (d_1 \sin^2 \Phi + d_2 \sin^4 \Phi), \quad (2)$$

$$d_1 = \beta' + 4(\beta'a_2 - \beta_1') - \beta - 4(\alpha\beta - \beta_1) = 0,0033222,$$

$$d_2 = -4(\beta'a_2 - \beta_1') + 4(\alpha\beta - \beta_1) = 0,0000368.$$

В формуле (1) величины $\frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma}$ и $\frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \gamma^2}$, как показано в работе [6], определяются

$$-\frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma} = \frac{2g_e}{a} \{ 1 + q + \alpha + (\beta - 2\alpha) \sin^2 \Phi \},$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \gamma^2} = \frac{6g_e}{a^2}.$$

Следовательно,

$$H \frac{\partial \gamma_0}{\partial \gamma} = g_e (\delta_1 \sin^2 \Phi + \delta_2 \sin^4 \Phi), \quad (3)$$

$$\frac{H^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial \gamma^2} = g_e \delta_3 \sin^4 \Phi, \quad (4)$$

где

$$\delta_1 = 2(\alpha_1 - \alpha) \left(1 + q + \frac{5}{2} \alpha + \frac{3}{2} \alpha_1 \right) = -0,0031494,$$

$$\delta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha) \left(\beta - \frac{7}{2} \alpha - \frac{3}{2} \alpha_1 \right) = 0,0000283,$$

$$\delta_3 = 3(\alpha_1 - \alpha)^2 = 0,0000072.$$

Отметим, что данная модель не вполне отвечает требованиям теории определения формы топографической поверхности Земли, развитой М. С. Молоденским. Во-первых, аномалии силы тяжести модели есть величины первого порядка. Во-вторых, топографическая поверхность модели является уровенной поверхностью. В теории же М. С. Молоденского аномалии силы тяжести должны быть величинами второго порядка, а топографическая поверхность — неуровенной поверхностью.

В связи с этим вычисленные высоты квазигеоида по формулам М. С. Молоденского [3] и по формулам [4, 5] для модели будут отличаться от высот квазигеоида, вычисленных из геометрических соображений.* Несмотря на это, мы воспользуемся этой моделью, так как при вычислениях будем интересоваться не окончательными результатами высот квазигеоида, а только сопоставлением полученных величин для высот квазигеоида по различным формулам.

Отмеченное некоторое несоответствие модели и теории не должно вызывать сомнения в достоверности полученных далее выводов, ибо физические предпосылки при выводе формул для высот квазигеоида в работе [3] и в статьях [4, 5] одни и те же.

Приступим к вычислению высот квазигеоида на модели по формулам, полученным в статьях [4, 5]:

$$g_e \zeta_0 = \frac{a}{4\pi} \int G_0 [S(\psi) - 1] d\sigma - W_0 + U_0, \quad (5)$$

$$g_e \zeta_1 = \frac{a}{4\pi} \int G_1 [S(\psi) - 1] d\sigma, \quad (6)$$

$$g_e \zeta_2 = \frac{a}{4\pi} \int G_2 [S(\psi) - 1] d\sigma - \frac{1}{2} \int x_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0}, \quad (7)$$

$$g_e \zeta_3 = \frac{a}{4\pi} \int G_3 [S(\psi) - 1] d\sigma - \frac{1}{2} \int x_1 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0}, \dots \quad (8)$$

$$G_0 = \Delta g_0 - \frac{2}{a} (W_0 - U_0), \quad (9)$$

$$G_1 = -H_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial v} + \int x_0 v_1 \frac{d\Sigma}{r_0^2}, \quad (10)$$

$$G_2 = -\frac{H_0^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial v^2} - \frac{3}{4a} \int x_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} + \int x_1 v_1 \frac{d\Sigma}{r_0^2} + 2\pi x_0 \operatorname{tg}^2 \alpha^*, \quad (11)$$

$$G_3 = -\frac{3}{4a} \int x_1 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0} + \int x_2 v_1 \frac{d\Sigma}{r_0^2} - \frac{3}{2} \int x_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0^2} + 2\pi x_1 \operatorname{tg}^2 \alpha^*, \dots \quad (12)$$

$$x_n = \frac{G_n}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int G_n [S(\psi) - 1] d\sigma, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (13)$$

где $\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots = \zeta$ — высота квазигеоида;

a — большая полуось отсчетного эллипсоида;

$S(\psi)$ — функция Стокса;

$$v_1 = \frac{H - H_0}{r_0}; \quad r_0 = 2a \sin \frac{\psi}{2},$$

H, H_0 — нормальные высоты текущей точки и данной близкой поверхности;

ψ — угловое расстояние между ними;

α^* — углы наклона близкой поверхности;

* Чтобы получить допустимое соответствие между высотами квазигеоида, вычисленными по формулам [3, 4, 5], с геометрическими, необходимо привести формулы [3, 4, 5] в соответствии с требованиями модели. А это потребует дополнительных больших вычислений.

$d\Sigma$ — элемент поверхности сферы радиуса a ;

W_0, U_0 — значения потенциалов, действительного в исходном пункте нивелировок, и нормального на отсчетном уровне эллипсоиде;

$\Delta g_0 = g - \gamma_0$ — аномалия силы тяжести;

g — измеренное значение силы тяжести на Земле;

γ_0 — нормальное значение силы тяжести, вычисленное по нормальной формуле.

Подставляя (9) в (5), учитывая (2) и

$$\int [S(\psi) - 1] d\sigma = -4\pi. \quad (14)$$

$$\int \sin^2 \Phi [S(\psi) - 1] d\sigma = 4\pi \left(\sin^2 \Phi_0 - \frac{2}{3} \right), \quad (15)$$

$$\int \sin^4 \Phi [S(\psi) - 1] d\sigma = 4\pi \left(\frac{1}{3} \sin^4 \Phi_0 + \frac{4}{7} \sin^2 \Phi_0 - \frac{16}{35} \right). \quad (16)$$

получаем

$$\zeta_0 = a \left\{ -\frac{2}{3} d_1 - \frac{16}{35} d_2 + \frac{W_0 - U_0}{ag_e} + \left(d_1 + \frac{4}{7} d_2 \right) \sin^2 \Phi_0 + \frac{d_2}{3} \sin^4 \Phi_0 \right\}, \quad (17)$$

по формуле (13) найдем

$$x_0 = \frac{g_e}{2\pi} \left\{ \frac{W_0 - U_0}{ag_e} - d_1 - \frac{24}{35} d_2 + \left(\frac{5}{2} d_1 + \frac{6}{7} d_2 \right) \sin^2 \Phi_0 + \frac{3}{2} d_2 \sin^4 \Phi_0 \right\}, \quad (18)$$

где Φ, Φ_0 — геоцентрические широты текущей точки и данной отсчетного эллипсоида.

Используя интегралы (14), (15) и (16), а также

$$\int (\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_0) \frac{d\Sigma}{r_0^3} = \frac{4\pi}{a} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi_0 \right), \quad (19)$$

$$\int (\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_0) \sin^2 \Phi \frac{d\Sigma}{r_0^3} = \frac{4\pi}{a} \left(\frac{4}{35} + \frac{11}{21} \sin^2 \Phi_0 - \sin^4 \Phi_0 \right), \quad (20)$$

легко вычислить для данной модели по формулам (10), (6), (11) и (7)

$$G_1 = -g_e (\delta_1 \sin^2 \Phi_0 + \delta_2 \sin^4 \Phi_0) + 2g_e (\alpha - \alpha_1) \left\{ \frac{W_0 - U_0}{3ag_e} - \frac{d_1}{21} + \left(\frac{97}{42} d_1 - \frac{W_0 - U_0}{ag_e} \right) \sin^2 \Phi_0 - \frac{5}{2} d_1 \sin^4 \Phi_0 \right\}; \quad (21)$$

$$\zeta_1 = -a \left\{ \delta_1 \left(\sin^2 \Phi_0 - \frac{2}{3} \right) + \delta_2 \left(-\frac{16}{35} + \frac{4}{7} \sin^2 \Phi_0 + \frac{1}{3} \sin^4 \Phi_0 \right) \right\} + 2a (\alpha - \alpha_1) \left\{ \frac{W_0 - U_0}{3ag_e} - \frac{22}{63} d_1 + \left(\frac{37}{42} d_1 - \frac{W_0 - U_0}{ag_e} \right) \sin^2 \Phi_0 - \frac{5}{6} d_1 \sin^4 \Phi_0 \right\}; \quad (22)$$

$$x_1 = \frac{g_e \delta_1}{2\pi} \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 \Phi_0 \right); \quad (23)$$

$$G_2 = -g_e \delta_2 \sin^4 \Phi_0 + g_e \delta_1 (\alpha - \alpha_1) \left(\frac{2}{21} - \frac{97}{21} \sin^2 \Phi_0 + 5 \sin^4 \Phi_0 \right); \quad (24)$$

$$\zeta_2 = a \left\{ \frac{16}{35} \delta_2 + \frac{44}{63} \delta_1 (\alpha - \alpha_1) - \left[\frac{4}{7} \delta_2 + \frac{37}{21} \delta_1 (\alpha - \alpha_1) \right] \sin^2 \Phi_0 - \left[\frac{\delta_2}{3} - \frac{5}{3} \delta_1 (\alpha - \alpha_1) \right] \sin^4 \Phi_0 \right\}. \quad (25)$$

Складывая формулы (17), (22) и (25), после некоторых преобразований получим

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 = a \left\{ d_1 - \delta_1 + \frac{4}{7} (d_2 - \delta_2 - \delta_3) + \frac{3}{7} (\alpha - \alpha_1) (d_1 - \delta_1) \right\} \sin^2 \Phi_0 + \\ + a \left\{ \frac{1}{3} (d_2 - \delta_2 - \delta_3) - \frac{5}{3} (\alpha - \alpha_1) (d_1 - \delta_1) \right\} \sin^4 \Phi_0. \quad (26)$$

В вычислениях принимались во внимание только малые величины первого и второго порядка. Постоянную ($W_0 - U_0$) мы нашли из условия, что при $\Phi_0 = 0$, $\zeta = 0$ и

$$\frac{W_0 - U_0}{ag_e} = \frac{2}{3} (d_1 - \delta_1). \quad (27)$$

Величины ζ_3 , ζ_4 , ... являются малыми третьего и высших порядков, поэтому мы их не вычисляли.

Вычислим теперь высоты квазигеоида на модели по формулам М. С. Молоденского [3].

Если при выводе формул М. С. Молоденского не соблюдать условия Стокса о равенстве потенциалов уровня эллипсоида и геоида и масс Земли и уровня эллипсоида*, то они будут отличаться от формул (5)–(13) только функциями G_0 , G_1 и G_2 . Именно в этом случае в формуле (9) вместо Δg_0 нужно взять Δg , а в формулах (10) и (11) положить $H_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial v}$ и $\frac{H_0^2}{2} \frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial v^2}$ равными нулю.

Имея это в виду, легко найти по формулам М. С. Молоденского для общего случая применительно к модели следующие величины:

$$\zeta'_0 = a \left\{ -\frac{2}{3} c_1 - \frac{16}{35} c_2 + \frac{W_0 - U_0}{ag_e} + \left(c_1 + \frac{4}{7} c_2 \right) \sin^2 \Phi_0 + \frac{c_2}{3} \sin^4 \Phi_0 \right\}; \quad (28)$$

$$x'_0 = \frac{g_e}{2\pi} \left(\frac{W_0 - U_0}{ag_e} - c_1 + \frac{5}{2} c_1 \sin^2 \Phi_0 \right); \quad (29)$$

$$G'_1 = 2g_e (\alpha - \alpha_1) \left\{ \frac{W_0 - U_0}{3ag_e} - \frac{c_1}{21} + \left(\frac{97}{42} c_1 - \frac{W_0 - U_0}{ag_e} \right) \sin^2 \Phi_0 - \frac{5}{2} c_1 \sin^4 \Phi_0 \right\}; \quad (30)$$

$$\zeta'_1 = 2a (\alpha - \alpha_1) \left\{ \frac{W_0 - U_0}{3ag_e} - \frac{22}{63} c_1 + \left(\frac{37}{42} c_1 - \frac{W_0 - U_0}{ag_e} \right) \sin^2 \Phi_0 - \frac{5}{6} c_1 \sin^4 \Phi_0 \right\}. \quad (31)$$

Используя то же условие для определения постоянной ($W_0 - U_0$) и сохраняя принятую точность вычислений, получаем

$$\zeta'_0 + \zeta'_1 = a \left\{ c_1 + \frac{4}{7} c_2 + \frac{3}{7} (\alpha - \alpha_1) c_1 \right\} \sin^2 \Phi_0 + \\ + \left\{ \frac{c_2}{3} - \frac{5}{3} c_1 (\alpha - \alpha_1) \right\} a \sin^4 \Phi_0; \quad (32)$$

$$\frac{W_0 - U_0}{ag_e} = \frac{2}{3} c_1. \quad (33)$$

Сопоставляя между собой формулы (32) и (26), видим, что они тождественно равны, так как

$$d_1 - \delta_1 = c_1; \quad d_2 - \delta_2 - \delta_3 = c_2.$$

Отсюда следует, что при решении интегрального уравнения, определяющего фигуру топографической поверхности Земли, по методу М. С. Молоденского, когда преобразуется вспомогательная поверхность, аномалии силы тяжести можно сохранять неизменными или считать их независимыми от малого параметра. Впрочем, этот вывод

* Формулы М. С. Молоденского [3], как известно, получены для частного случая.

можно получить, сопоставляя между собой формулы М. С. Молоденского [3] и формулы (5), (6), (7),... В самом деле, если сложить формулы (5), (6), (7)..., то, как легко установить, в окончательный результат полученной для ξ формулы входит аномалия Δg , а не Δg_0 , и так как приближения складываются, то процесс сходимости несколько удлинится, однако при этом ничего не теряется.

На первый взгляд кажется, что несоблюдения условий Стокса о равенстве масс и потенциалов изменит высоты ξ на постоянную величину. Однако на самом деле это не так. Изменение высот ξ , вызванное различием масс Земли и уровенного отсчетного эллипсоида, а также различием потенциалов W_0 и U_0 , есть величина переменная. Это нетрудно установить при вычислении функций G_1 , G_2 и т. д. Поэтому формулы М. С. Молоденского [3], полученные для частного случая, не могут привести к успеху в общем случае.

2. В работе [7] предложены новые формулы, позволяющие определять внешнее гравитационное поле и фигуру топографической поверхности Земли:

$$T = \frac{f\Delta M}{z} - \int \mu F dS, \quad (34)$$

$$F = \frac{1}{z} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi - \frac{r_1}{z^2} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi \ln \frac{z + r - \rho \cos \psi}{2z};$$

$$g_e \xi + W_0 - U_0 = \frac{f\Delta M}{\rho_0} - \int \mu F^* dS; \quad (35)$$

$$\xi = \frac{1}{g_e \rho_0^3} \int \mu \left(\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\rho_0^3 - r^2 + 2r\rho \cos \psi}{\rho_0 + r - \rho \cos \psi} - \rho \ln \frac{\rho_0 + r - \rho \cos \psi}{2\rho_0} \right) \sin \psi \cos A dS; \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial \nu} = -\frac{2}{\rho_0^2} (W_0 - U_0) + \frac{1}{\rho_0^2} \int \frac{\mu}{r} dS +$$

$$+ \frac{1}{\rho_0} \left(2\pi \mu_0 \cos \alpha^* - \int \frac{\rho \cos \psi - \rho_0}{r^3} \mu dS \right); \quad (37)$$

$$\mu \sec \alpha^* = v = \sum_0^\infty v_m, \quad (38)$$

$$v_m = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int (t'_m - t_m) \frac{d\Sigma}{r_0'} + \frac{t_m}{4\pi a}; \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (39)$$

$$t_0 = -a\Delta g + 2(W_0 - U_0); \quad t_1 = 0,$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \int v_0 v_1^2 \frac{d\Sigma}{r_0}; \quad t_3 = 0, \dots; \quad v_1 = \frac{H - H_0}{r_0}; \quad (40)$$

$$r_1^2 = z^2 + \rho^2 - 2z\rho \cos \psi, \quad (41)$$

где T — возмущающий потенциал в точке внешнего пространства, полярные координаты которой z и Φ (когда точка находится на поверхности S , то $z = \rho_0$, $r_1 = r$);

ρ — радиус-вектор текущей точки вспомогательной поверхности S ;

$\Delta M = M_3 - M_0$ — разность масс Земли и уровенного отсчетного эллипсоида;

f — гравитационная постоянная; $F^* = (F)_{r_1 = r, z = \rho_0}$;

ξ — уклонение отвеса в меридиане на топографической поверхности;

A — азимут элемента dS ;

$\frac{\partial \Delta g}{\partial \nu}$ — вертикальный аномальный градиент силы тяжести на Земле;

ν — направление внешней нормали отсчетного эллипсоида, большая полуось которого a .

Формула (34) получена из уравнения

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (z^2 T) = \int \frac{\mu}{r_1} dS \quad (42)$$

при помощи метода Дини, которым пользуются для решения внешней и внутренней задач Неймана. Внимательное изучение вывода формулы (34) вызывает некоторое сомнение в правильности полученного результата. Так, выполняя в уравнении (42) справа и слева интегрирование по z , мы сохранили некоторые члены с очень большими значениями z . Хотя эти члены при соблюдении условий

$$\int \mu \rho \cos \psi dS = 0, \quad \int \mu dS = f \Delta M$$

не влияют на возмущающий потенциал, тем не менее наличие их в формуле (34) требует обоснования. В связи с этим решим дифференциальное уравнение (42) иначе, чем оно решено в работе [7].

Пусть

$$T = \int \frac{\omega}{r_1} dS. \quad (43)$$

Тогда уравнение (42) можно записать так:

$$\frac{3}{2} \int \frac{\omega}{r_1} dS + \frac{1}{2} \int \frac{\rho^2 - z^2}{r_1^3} \omega dS = \int \frac{\mu}{r_1} dS. \quad (44)$$

Воспользовавшись формулой (41), нетрудно найти

$$-\frac{\rho^2 - z^2}{r_1^3} = \frac{1}{r_1} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{r_1} \right). \quad (45)$$

Так как

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{z} \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{z} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (46)$$

то по формуле (45) имеем

$$-\frac{\rho^2 - z^2}{r_1^3} = \frac{1}{z} \sum_0^\infty (2n+1) \left(\frac{\rho}{z} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (47)$$

где $P_n(\cos \psi)$ — полином Лежандра n -го порядка.

Следовательно, уравнение (44) принимает вид:

$$-\int \frac{\omega}{z} \sum_0^\infty (n-1) \left(\frac{\rho}{z} \right)^n P_n(\cos \psi) dS = \int \frac{\mu}{z} \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{z} \right)^n P_n(\cos \psi) dS,$$

и мы приходим к соотношению

$$\int \omega \rho^n P_n(\cos \psi) dS = - \frac{\int \mu \rho^n P_n(\cos \psi) dS}{n-1}, \quad (48)$$

которое позволяет из формулы (43) получить формулу (34). Действительно, подставляя (46) в формулу (43) и учитывая соотношение (48), найдем

$$T = \frac{1}{z} \int \omega \sum_0^\infty \left(\frac{\rho}{z} \right)^n P_n(\cos \psi) dS = \sum_0^\infty z^{-n-1} \int \omega \rho^n P_n(\cos \psi) dS =$$

$$= - \sum_0^{\infty} \frac{\int \mu \rho^n P_n(\cos \psi) dS}{z^{n+1} (n-1)} = \frac{1}{z} \int \mu dS - \int \mu F dS, \quad (49)$$

где

$$F = \sum_2^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1}.$$

Просуммируем ряд F . Для этого, обозначив $\frac{\rho}{z} = u$, проинтегрируем в пределах от 0 до u очевидное равенство

$$\frac{1}{u^2} + \frac{\cos \psi}{u} + \sum_2^{\infty} u^{n-2} P_n(\cos \psi) = \frac{1}{u^2 \sqrt{1+u^2-2u \cos \psi}}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \frac{u^{n-1}}{n-1} P_n(\cos \psi) &= \frac{1}{u} (1 - u \cos \psi + \sqrt{1+u^2-2u \cos \psi}) - \\ &- \cos \psi \ln \frac{1}{2} (1 - u \cos \psi + \sqrt{1+u^2-2u \cos \psi}), \end{aligned}$$

или

$$\sum_2^{\infty} \frac{\rho^n}{z^{n+1}} \cdot \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1} = \frac{1}{z} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi - \frac{r_1}{z^2} - \frac{\rho}{z^2} \cos \psi \ln \frac{z + r_1 - \rho \cos \psi}{2z}.$$

В статье [7] показано, что при $z > \rho$

$$T = \frac{f \Delta M}{z} + \frac{c}{z^3} + \dots \quad (50)$$

Сравнивая (50) с (49), получаем

$$f \Delta M = \int \mu dS.$$

Итак, мы получили формулу (34) другим путем, причем, совершенно строго. Это свидетельствует о том, что решение, выполненное в статье [7], правильно.

Приведем формулы (35), (36) и (37) к удобному виду для вычислений. Следуя М. С. Молоденскому [3], преобразуем вспомогательную поверхность S , применяя малый постоянный параметр k . Очевидно, для преобразованной поверхности формулы (35), (36) и (37) будут иметь тот же вид, однако входящие в них функции изменятся. Аномалии силы тяжести мы сохранили неизменными. Тогда, зная, что для преобразованной поверхности

$$\bar{\rho} = a + kH, \quad \bar{r}^2 = r_0^2 (1 + k^2 \nu_1^2), \quad \operatorname{tg} \bar{\alpha}^* = k \operatorname{tg} \alpha^*$$

где

$$r_0 = 2a \sin \frac{\psi}{2}, \quad \nu_1 = \frac{H - H_0}{r_0},$$

легко получить следующие разложения:

$$\bar{F}^* = \sum_0^{\infty} k^m f_m. \quad (51)$$

$$f_0 = \frac{1}{a} - \frac{\cos \psi}{a} - \frac{r_0}{a^2} - \frac{\cos \psi}{a} \ln \sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) = \frac{1}{a} \sum_2^{\infty} \frac{P_n(\cos \psi)}{n-1};$$

$$f_1 = \frac{v_1}{a} \cdot \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} \quad f_2 = -\frac{v_1^2}{2a} \cdot \frac{3 + 4 \sin \frac{\psi}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)^3} \cdot \sin \frac{\psi}{2};$$

$$f_3 = -\frac{v_1^3}{6a} \cdot \frac{1 + 3 \sin \frac{\psi}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)^3} \cos \psi, \dots$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}_0} \left(\frac{\bar{\rho}}{r} \cdot \frac{\bar{\rho}_0^2 - \bar{r}_s + 2\bar{\rho} \bar{r} \cos \psi}{\bar{\rho}_0 + \bar{r} - \bar{\rho} \cos \psi} - \bar{\rho} \ln \frac{\bar{\rho}_0 + \bar{r} - \bar{\rho} \cos \psi}{2\bar{\rho}_0} \right) = \sum_0^{\infty} k^m b_m, \quad (52)$$

$$b_0 = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1 + 4 \cos \psi \sin \frac{\psi}{2} - 4 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)} - \ln \sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right) \right\};$$

$$b_1 = \frac{v_1}{a^2} \cdot \frac{1 + 4 \cos \psi \sin \frac{\psi}{2} + 4 \sin^3 \frac{\psi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)^2};$$

$$b_2 = \frac{v_1^2}{a^2} \cdot \frac{1 - 13 \sin \frac{\psi}{2} - 16 \sin^2 \frac{\psi}{2}}{8 \sin^3 \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)^3};$$

$$b_3 = \frac{v_1^3}{a^2} \cdot \frac{-3 - 12 \sin \frac{\psi}{2} - 43 \sin^2 \frac{\psi}{2} - 16 \sin^3 \frac{\psi}{2} + 24 \sin^4 \frac{\psi}{2}}{24 \sin^4 \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2}\right)^4}, \dots$$

Полагая далее, что

$$\bar{\zeta} = \sum_0^{\infty} k^m \zeta_m; \quad \bar{\xi} = \sum_0^{\infty} k^m \xi_m; \quad \frac{\partial \Delta \bar{g}}{\partial v} = \sum_0^{\infty} k^m \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_m; \quad \bar{v} = \sum_0^{\infty} k^m v_m,$$

где

$$\zeta = \sum_0^{\infty} \zeta_m, \quad (53)$$

$$\xi = \sum_0^{\infty} \xi_m, \quad (54)$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial v} = \sum_0^{\infty} \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_m, \quad (55)$$

из формул (35), (36) и (37) получаем

$$g_e \zeta_0 + W_0 - U_0 = \frac{f \Delta M}{a} - \int v_0 f_0 d\Sigma, \quad (56)$$

$$g_e \zeta_1 = - \int v_0 f_1 d\Sigma, \quad (57)$$

$$g_e \zeta_2 = - \int (v_2 f_0 + v_0 f_2) d\Sigma, \quad (58)$$

$$g_e \zeta_3 = - \int (v_2 f_1 + v_0 f_3) d\Sigma, \dots \quad (59)$$

$$g_e \xi_0 = \int v_0 b_0 \sin \psi \cos A d\Sigma, \quad (60)$$

$$g_e \xi_1 = \int v_0 b_1 \sin \psi \cos A d\Sigma, \quad (61)$$

$$g_e \xi_2 = \int (v_2 b_0 + v_0 b_2) \sin \psi \cos A d\Sigma, \quad (62)$$

$$g_e \xi_3 = \int (v_2 b_1 + v_0 b_3) \sin \psi \cos A d\Sigma, \dots \quad (63)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_0 = - \frac{2}{a^2} (W_0 - U_0) + \frac{2\pi}{a} v_0 + \frac{3}{2a^2} \int v_0 \frac{d\Sigma}{r_0}, \quad (64)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_1 = - \frac{1}{a} \int v_0 v_1 \frac{d\Sigma}{r_0^2}, \quad (65)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_2 = \frac{2\pi}{a} (v_2 - v_0 \operatorname{tg}^2 \alpha^*) + \frac{3}{2a^2} \int \left(v_2 - \frac{1}{2} v_0 v_1^2 \right) \frac{d\Sigma}{r_0}, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial v} \right)_3 = - \frac{1}{a} \int \left(v_2 - \frac{3}{2} v_0 v_1^2 \right) v_1 \frac{d\Sigma}{r_0^3}, \dots \quad (67)$$

По формулам (56)–(59), (60)–(63) и (64)–(67) удобно вычислять отдельные приближения для высот квазигеоида ζ , уклонений отвеса ξ и аномалий вертикального градиента силы тяжести. Величины v_m , которые входят в эти формулы, вычисляются по формуле (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Бровар, В. А. Магницкий, Б. П. Шимберев. Теория фигуры Земли. Геодезиздат, 1961.
2. Н. П. Грушинский. Теория фигуры Земли. Гос. издат. физ.-мат. лит., М., 1963.
3. М. С. Молоденский, В. Ф. Еремеев, М. И. Юркина. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, Геодезиздат, 1960.
4. И. Ф. Монин. О вычислении уклонений отвеса. Астрономический журнал, № 1, 4, 1963.
5. И. Ф. Монин. Решение интегрального уравнения М. С. Молоденского, определяющего фигуру физической поверхности Земли с учетом величин третьего порядка. Астрономический журнал, № 1, 1965.
6. И. Ф. Монин. Про обчислення аномалій сили тяжіння, висот квазігеоїда та відхилень виска. ДАН УССР, № 5, 1963.
7. И. Ф. Монин. Об определении фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 2, Изд-во Львовского ун-та, 1965.

Работа поступила
12 марта 1965 г.