

В. Д. ШИПУЛИН

## ВЛИЯНИЕ КАЖДОГО ИЗ ИЗМЕРЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ НА ТОЧНОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ ПУНКТОВ

При проектировании и создании геодезических сетей весьма важно знать степень влияния каждого измерения на точность сети. Анализ точности проектируемой сети с выделением степени влияния каждого измерения на точность положения пунктов позволяет решить вопрос о необходимости выполнения тех или иных измерений, иначе говоря, позволяет найти наиболее экономичные варианты.

Представим вначале естественный путь получения выражений, характеризующих погрешность положения пунктов. Заметим, что в работе [1] изложен иной путь, в котором вектор свободных членов рассматривается как независимо измеренная величина.

При равноточных измерениях вектор  $\bar{r}$  поправок в косвенные измерения, составляющими которого являются поправки координат пунктов, может быть представлен, согласно работе [2], скалярным произведением вектора  $\bar{L}$  свободных членов на тензор  $\Pi^{-1}$ , обратный тензору  $\Pi$  коэффициентов нормальных уравнений:

$$-\bar{r} = \bar{L} \cdot \Pi^{-1}. \quad (1)$$

В связи с тем, что при равноточных измерениях вектор свободных членов выражается равенством

$$\bar{L} = l_1 \bar{g}_1 + l_2 \bar{g}_2 + \dots + l_n \bar{g}_n, \quad (2)$$

где  $\bar{g}_i$  — градиент измеренной функции, в силу дистрибутивности скалярного произведения тензора на вектор, формулу (1) можно привести к виду

$$-\bar{r} = l_1 \bar{g}_1 \cdot \Pi^{-1} + l_2 \bar{g}_2 \cdot \Pi^{-1} + \dots + l_n \bar{g}_n \cdot \Pi^{-1}. \quad (3)$$

Таким образом, вектор смещения представлен линейной зависимостью от непосредственно измеренных величин  $l_i$ .

Оценивая точность функции (3), найдем ошибку вектора смещения, иными словами, погрешность положения пунктов

$$M_r^2 = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial l_1} \right)^2 m_1^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial l_2} \right)^2 m_2^2 + \dots + \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial l_n} \right)^2 m_n^2. \quad (4)$$

Так как

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial l_i} = \bar{g}_i \cdot \Pi^{-1},$$



то

$$M_r^2 = \bar{g}_1 \cdot \Pi^{-1} \bar{g}_1 \cdot \Pi^{-1} m_1^2 + \bar{g}_2 \cdot \Pi^{-1} \bar{g}_2 \cdot \Pi^{-1} m_2^2 + \dots + \bar{g}_n \cdot \Pi^{-1} \bar{g}_n \cdot \Pi^{-1} m_n^2. \quad (5)$$

Поскольку приводимый здесь вывод отнесен к случаю равноточных измерений, следовательно,

$$M_r^2 = \Pi^{-1} \cdot [\bar{g}_i \bar{g}_i] \cdot \Pi^{-1} m^2 \quad (6)$$

или

$$M_r^2 = \Pi^{-1} \cdot \Pi \cdot \Pi^{-1} m^2.$$

Учитывая, что  $\Pi^{-1} \cdot \Pi = E$ , где  $E$  — единичный тензор, найдем окончательно

$$M_r^2 = m^2 \Pi^{-1}. \quad (7)$$

Изложенный непосредственный путь получения выражения (7) является наиболее простым в методическом отношении и совершенно строгим. Данный путь позволяет получить весьма интересные соотношения. Обозначим

$$\bar{q}^i = \bar{g}_i \cdot \Pi^{-1}. \quad (8)$$

Тогда выражение (5) будет иметь вид

$$M_r^2 = \bar{q}^1 \bar{q}^1 m_1^2 + \bar{q}^2 \bar{q}^2 m_2^2 + \dots + \bar{q}^n \bar{q}^n m_n^2, \quad (9)$$

или

$$M_r^2 = H^{11} m_1^2 + H^{22} m_2^2 + \dots + H^{nn} m_n^2, \quad (10)$$

где  $H^{ii} = \bar{q}^i \bar{q}^i$  — тензор второго ранга.

Полученное выражение (10) замечательно тем, что в нем погрешность положения пунктов представлена суммой тензоров  $H^{ii} m_i^2$ , каждый из которых соответствует влиянию отдельного измерения.

При неравноточных измерениях, согласно [2], вектор смещения определяется выражением

$$-\bar{r} = \bar{L}_* \cdot \Pi_*^{-1}. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$\bar{L}_* = p_1 l_1 \bar{g}_1 + p_2 l_2 \bar{g}_2 + \dots + p_n l_n \bar{g}_n, \quad (12)$$

представим вектор смещения линейной функцией непосредственно измеренных величин

$$-\bar{r} = p_1 \bar{g}_1 \cdot \Pi_*^{-1} l_1 + p_2 \bar{g}_2 \cdot \Pi_*^{-1} l_2 + \dots + p_n \bar{g}_n \cdot \Pi_*^{-1} l_n. \quad (13)$$

К выражению (13) применима общая формула ошибки функции независимых аргументов. Очевидно, что погрешность положения пунктов определяется следующим образом:

$$M_r^2 = (p_1 \bar{g}_1 \cdot \Pi_*^{-1} p_1 \bar{g}_1 \cdot \Pi_*^{-1}) m_1^2 + (p_2 \bar{g}_2 \cdot \Pi_*^{-1} p_2 \bar{g}_2 \cdot \Pi_*^{-1}) m_2^2 + \dots + (p_n \bar{g}_n \cdot \Pi_*^{-1} p_n \bar{g}_n \cdot \Pi_*^{-1}) m_n^2. \quad (14)$$

Полученное выражение преобразуется к виду

$$M_r^2 = \Pi_*^{-1} \cdot (p_1 \bar{g}_1 \bar{g}_1) \cdot \Pi_*^{-1} \mu^2 + \Pi_*^{-1} \cdot (p_2 \bar{g}_2 \bar{g}_2) \cdot \Pi_*^{-1} \mu^2 + \dots + \Pi_*^{-1} \cdot (p_n \bar{g}_n \bar{g}_n) \cdot \Pi_*^{-1} \mu^2, \quad (15)$$



или

$$M_r^2 = \Pi_*^{-1} \cdot [p_i \bar{g}_i \bar{g}_i] \cdot \Pi_*^{-1} \mu^2 = \Pi_*^{-1} \cdot \Pi_* \cdot \Pi_*^{-1} \mu^2. \quad (16)$$

Поэтому окончательное выражение погрешности положения пунктов будет

$$M_r^2 = \mu^2 \Pi_*^{-1}. \quad (17)$$

В этом выводе наше внимание привлекает форма (14), которую перепишем так:

$$M_r^2 = \bar{q}_*^1 \bar{q}_*^1 m_1^2 + \bar{q}_*^2 \bar{q}_*^2 m_2^2 + \dots + \bar{q}_*^n \bar{q}_*^n m_n^2. \quad (18)$$

Здесь

$$\bar{q}_*^i = p_i \bar{g}_i \cdot \Pi_*^{-1}.$$

Полагая, что  $H_*^{ii} = \bar{q}_*^i \bar{q}_*^i$ , получим

$$M_r^2 = H_*^{11} m_1^2 + H_*^{22} m_2^2 + \dots + H_*^{nn} m_n^2. \quad (19)$$

В выражении (19) четко выделено влияние каждого измерения на точность положения пунктов.

Формы (10), (19), а также выражение (5) в работе [3] способствуют проведению глубокого анализа точности геодезических сетей. Естественно, этот путь может найти широкое применение, если вычисления производить на ЭВМ. Заметим, что указанные формулы удобны для составления программ для ЭВМ.

**Пример.** С целью иллюстрации представленного решения определим в пространственной линейной засечке (рисунок) степень влияния каждого измерения на точность положения пункта 3. Для составления задачи использованы материалы, представленные в работе [4] для пространственной сети, отнаблюденной в 1961 г. в западной части Высоких Татр. Принято, что исходные пункты имеют координаты, приведенные в табл. 1. Длины линий, измеренные геодезическим NASM-2A, даны в табл. 2.

Условимся градиенты измеренных функций (для линий) обозначать как  $\text{grad } D_{i-3} = g_i$ . Понятно, что компонентами вектора  $g_i$  являются коэффициенты  $i$ -уравнения поправок.

По данным табл. 1 и 2 получены следующие значения свободных членов уравнений поправок:

$$l_2 = -0,10 \text{ см}; \quad l_4 = +0,40 \text{ см}; \quad l_5 = +3,00 \text{ см}; \quad l_6 = -1,60 \text{ см}.$$

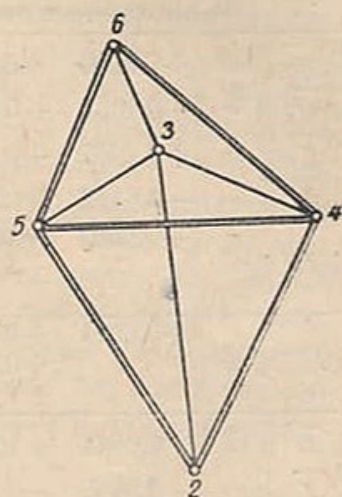


Схема пространственной сети.

Таблица 1

Координаты исходных пунктов

Координаты	Пункт 2	Пункт 4	Пункт 5	Пункт 6	3 приближен.
X	2000,000	4796,868	5047,615	7061,755	5806,197
Y	2000,000	3762,603	0480,400	1582,819	2000,000
Z	1316,650	2178,367	1881,438	2141,419	1349,318



Для того чтобы иметь примеры применения формул (10) и (19), задача решена в двух вариантах: в первом непосредственные измерения считаются равноточными, во втором — неравноточными.

Таблица 2

Длины линий

Стороны	Пространственные расстояния $D_{3-i}, м$	Средние квадратические ошибки $m_i, мм$	Веса $p_i = \frac{10}{m_i^2}$
3-2	3806,338	$\pm 9,4$	0,11
3-4	2193,814	5,6	0,32
3-5	1779,796	2,8	1,28
3-6	1542,057	4,4	0,52

Для образования тензоров  $m^2 H^{ii}$  при равноточных измерениях использовалась средняя квадратическая ошибка измерения  $m = \pm 2,24 см$ , полученная по результатам уравнивания. В случае нерав-

Таблица 3

Ведомость определения тензоров, соответствующих влиянию каждого измерения

Равноточные измерения			Неравноточные измерения		
$\  \bar{g}_2 \  = \  +1,0000$	$+0,0000$	$+0,0076$	$\  p_2 \bar{g}_2 \  = \  +0,1100$	$\div 0,0000$	$+0,0009$
$\  \bar{g}_4 \  = \  +0,4601$	$-0,8034$	$-0,3779$	$\  p_4 \bar{g}_4 \  = \  +0,1472$	$-0,2570$	$-0,1210$
$\  \bar{g}_5 \  = \  +0,4262$	$+0,8542$	$-0,2990$	$\  p_5 \bar{g}_5 \  = \  +0,5453$	$+1,0931$	$-0,3827$
$\  \bar{g}_6 \  = \  -0,8142$	$+0,2705$	$-0,5141$	$\  p_6 \bar{g}_6 \  = \  +0,4233$	$+0,1404$	$-0,2673$
$\  \Pi \  = \  +2,0557$	$-0,2254$	$+0,1251$	$\  \Pi_* \  = \  +0,7546$	$+0,2332$	$-0,0002$
	$+1,4470$	$-0,0906$		$+1,1778$	$-0,3019$
		$+0,4965$			$+0,2975$
$\  \Pi^{-1} \  = \  +0,5011$	$+0,0710$	$-0,1133$	$\  \Pi^{-i}_* \  = \  +1,4451$	$-0,3862$	$-0,3909$
	$+0,7091$	$+0,1115$		$+1,2508$	$+1,2690$
		$+2,0630$			$+4,6489$
$\  \bar{L} \  = \  +2,6644$	$+1,8088$	$-0,2266$	$\  \bar{L}_* \  = \  +2,3609$	$+2,9519$	$-0,7691$
$\  \bar{r} \  = \  -1,489$	$-1,447$	$+0,568$	$\  \bar{r} \  = \  -2,572$	$-1,804$	$+0,752$
$\  \bar{q}^2 \  = \  +0,500$	$+0,072$	$-0,097$	$\  \bar{q}^2_* \  = \  +0,1586$	$-0,041$	$-0,039$
$\  \bar{q}^4 \  = \  +0,216$	$-0,579$	$-0,922$	$\  \bar{q}^4_* \  = \  +0,359$	$-0,532$	$-0,946$
$\  \bar{q}^5 \  = \  +0,308$	$+0,602$	$-0,570$	$\  \bar{q}^5_* \  = \  +0,516$	$+0,671$	$-0,605$
$\  \bar{q}^6 \  = \  -0,330$	$+0,076$	$-0,938$	$\  \bar{q}^6_* \  = \  -0,561$	$-0,000$	$-0,899$
$\  H^{22} \  = \  +0,250$	$+0,036$	$-0,048$	$\  H^{22}_* \  = \  +0,025$	$-0,006$	$-0,006$
	$+0,005$	$-0,007$		$+0,002$	$+0,002$
		$+0,009$			$+0,002$
$\  H^{44} \  = \  +0,047$	$-0,125$	$-0,199$	$\  H^{44}_* \  = \  \div 0,129$	$-0,191$	$-0,340$
	$+0,355$	$+0,533$		$+0,283$	$+0,503$
		$+0,849$			$+0,895$
$\  H^{55} \  = \  +0,095$	$+0,186$	$-0,176$	$\  H^{55}_* \  = \  +0,266$	$+0,346$	$-0,312$
	$+0,363$	$-0,343$		$+0,450$	$-0,406$
		$+0,324$			$-0,366$
$\  H^{66} \  = \  +0,109$	$-0,025$	$+0,310$	$\  H^{66}_* \  = \  +0,315$	$+0,000$	$+0,505$
	$+0,006$	$-0,072$		$+0,000$	$+0,000$
		$+0,880$			$+0,808$



Равноточные измерения				Неравноточные измерения			
$\ m^2 H^{22}\ $	+1,251	+0,180	-0,242	$\ m^2 H_{*}^{22}\ $	+0,022	-0,006	-0,005
		+0,026	-0,034			+0,001	+0,001
			+0,047				+0,001
$\ m^2 H^{44}\ $	+0,234	-0,626	-0,997	$\ m^2 H_{*}^{44}\ $	+0,040	-0,060	-0,107
		+1,676	+1,667			+0,089	+0,158
			+4,246				+0,281
$\ m^2 H^{55}\ $	+0,474	+0,928	-0,878	$\ m^2 H_{*}^{55}\ $	+0,021	+0,027	-0,024
		+1,815	-1,716			+0,035	-0,032
			+1,624				+0,029
$\ m^2 H^{66}\ $	+0,546	-0,126	+1,550	$\ m^2 H_{*}^{66}\ $	+0,061	+0,002	+0,098
		+0,029	-0,358			+0,000	+0,000
			+4,400				+0,156

Примечание. Численные значения компонент тензоров  $m^2 H^{ii}$ ,  $m^2_i H_{*}^{ii}$ ,  $\bar{r}$  имеют размерность  $см^2$ .

ноточных измерений для определения тензоров  $m^2_i H_{*}^{ii}$  использованы известные до уравнивания значения ошибок  $m_i$  (табл. 2).

Перед анализом результатов следует напомнить, что чем больше диагональные компоненты в  $m^2 H^{ii}$  или  $m^2_i H_{*}^{ii}$ , тем значительнее степень влияния  $i$ -измерения на точность определения координат. Если тензор  $m^2 H^{ii}$  или  $m^2_i H_{*}^{ii}$  имеет (сравнительно с другими подобными тензорами) малые по величине диагональные компоненты,  $i$ -измерение незначительно участвует в повышении точности той или иной координаты, иначе говоря, «не несет нагрузки».

Сравнивая диагональные компоненты тензоров  $m^2 H^{ii}$  или  $m^2_i H_{*}^{ii}$  в табл. 3, можно установить, что измерение линии 3—2 практически не повышает точности определения координат  $Y$ ,  $Z$ , а измерением линии 3—6 не повышается точность определения ординаты  $Y$ . Окончательное решение о целесообразности проведения того или иного измерения может дать сравнение первых инвариантов указанных тензоров. В нашем примере наименьший инвариант имеет тензор  $m^2 H^{22}$ ,  $m^2_i H_{*}^{22}$ , что ставит под сомнение целесообразность измерения линии 3—2 как незначительно повышающей точность положения пункта 3. Разумеется, избыточное измерение необходимо, но выполнять его следует в ином направлении, отличном от направления линии 3—2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей. Уч. зап. ВАМУ, вып. XV. Л., 1959.
2. Шипулин В. Д. К вопросу о векторном и тензорном представлении уравновешивания геодезических измерений. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 4, Изд-во Львов. ун-та, 1966.
3. Шипулин В. Д. Геометрический метод оценки точности функций измеренных величин. Известия Вузов Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 2, 1967.
4. Hradilek L. Höhenbestimmung aus electrooptisch gemessenen Längen (Fortsetzung). Studia Geophysica et Geodaetica, vol. 6, No. 4, 1962.

Работа поступила  
19 апреля 1968 г.