*М. И. МАРЫЧ*

# К ВОПРОСУ О ФОРМУЛЕ СТОКСА

Основной формулой теории фигуры Земли, как известно, является формула, определяющая внешнюю уровенную поверхность планеты. Эту формулу впервые получил Стокс (1849). В основу своей теории он принял понятие о нормальной планете (уровенном сфероиде), введенное еще Ньютоном, Клеро и Лапласом. Дальнейшие усилия исследователей в области теории фигуры Земли в основном были направлены на устранение некоторых существенных недостатков теории Стокса. В вопросе исследования упомянутой формулы заслуживают особого внимания результаты, полученные Пицетти. Он решил проблему Стокса для поверхности эллипсоида, которая в силу известных причин принимается за поверхность отсчета, и выполнил оригинальные доказательства точности, которую обеспечивает формула Стокса [6]. Согласно Пицетти, эта формула определяет фигуру планеты с учетом малых величин порядка расстояния между поверхностями уровенного сфероида (эллипсоида) и планеты. Однако, это доказательство, по мнению Н. К. Мигаля, не вполне убедительно [1].

В настоящей статье рассматривается вопрос об определении фигуры планеты с любой степенью точности и доказывается, что формула Стокса, а также другие, более общие формулы классической теории фигуры Земли, а именно формулы Пицетти и Бровара [4], вполне решают поставленную задачу, если известно нормальное поле, соответствующее заданной точности результата. При доказательстве сказанного будем исходить из неклассического метода определения фигуры Земли, предложенного и разработанного Н. К. Мигалем (1949), в котором отсутствует понятие о нормальном гравитационном поле [1—3].

Остановимся вкратце на формуле, полученной нами в работе [5]. Пусть $s_1$ — определяемая внешняя уровенная поверхность планеты и $s$ — известная поверхность отсчета, $h$ — расстояние между этими поверхностями, отсчитываемые по на-



правлению внешней нормали $n$ к поверхности $s$. Предположим, что поверхности $s_1$ и $s$ настолько близки между собой и к сфере радиуса $a$, что при выводе формулы для $h$ вполне достаточно сохранять малые величины порядка $\frac{h}{a}$. Будем также предполагать, что величины $h$ и отклонение отвеса имеют одинаковый порядок малости, который примем равным $m$. При этом малой величиной первого порядка будем считать отношение отклонения определяемой поверхности $s_1$ от сферы к ее радиусу $y$. Исходя из формулы Грина для потенциала силы тяжести и используя сферические функции, а также принимая, что

$$\frac{dg}{dn_1} = -\frac{2g}{a} + \tau,$$

где $g$ — сила тяжести на поверхности $s_1$, $\tau$ — малая величина первого порядка, получим формулу

$$-h = l + \frac{3}{8\pi}\int l\,[S(\psi) - 1]\,d\sigma + (h)_1, \tag{1}$$

определяющую фигуру планеты с учетом малых величин $m$-го порядка [5]. Здесь приняты обозначения:

$$l = -\frac{2W_0}{g} + \frac{1}{2\pi g}\int\limits_S g\frac{ds}{r} + \frac{1}{2\pi g}\int\limits_S \left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] ds + \frac{U_s}{g}, \tag{2}$$

$$(h)_1 = (\bar{x}\cos\lambda + \bar{y}\sin\lambda)\cos\varphi + \bar{z}\sin\varphi, \tag{3}$$

$S(\psi)$ — функция Стокса; $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса; $W_0$ — значение потенциала силы тяжести на поверхности $s_1$; $r$ — расстояние между данной и текущей точками поверхности $s$; $U$ — центробежный потенциал; $\varphi, \lambda$ — астрономические координаты исследуемой точки; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — координаты центра инерции Земли — малые величины $m$-го порядка. Следовательно, при заданных $s, g, W_0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ формула (1) определяет фигуру $s_1$ с учетом величин любого порядка малости, который обозначен через $m$. Принимая поверхность $s_1$, определенную с погрешностью $m+1$-го порядка малости, за отсчетную, можно найти фигуру $s_1$ с учетом величин $m+1$-го порядка малости и т. д. При этом, конечно, $l$ всегда вычисляется по формуле (2), а $(h_1)$ — по формуле (3). Итак, при использовании метода Мигаля никаких трудностей теоретического характера не возникает при определении фигуры планеты с любой степенью точности.

Приведем формулу (1) к более простому виду с помощью использования понятия о нормальном гравитационном поле*. Предположим, что поверхность отсчета $s$ является уровенной поверхностью нормального потенциала $V$. Тогда, при условии, что в формуле (1) $h=0$, имеем $l=0$, $W_0=V_0$ и $g=\gamma$, где $\gamma$ — значение нормальной силы тяжести на поверхности $s$. При этом из (2) следует

$$\frac{1}{2\pi g}\int\limits_S\left[\frac{1}{r}\,\frac{dU}{dn}-U\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds+\frac{U_s}{g}=\frac{2V_0}{g}-\frac{1}{2\pi g}\int\limits_S\gamma\frac{ds}{r}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), находим

$$l=-\frac{2(W_0-V_0)}{g}+\frac{1}{2\pi g}\int\limits_S(g-\gamma)\frac{ds}{r}.$$

Для того чтобы интегрирование по поверхности $s$ заменить интегрированием по поверхности сферы, необходимо положить, что аномалии силы тяжести

$$\Delta g=g-\gamma \quad (5)$$

являются малыми величинами $m$-го порядка. Поступая так, имеем

$$l=-\frac{2(W_0-V_0)}{g}+\frac{a}{2\pi g}\int\Delta g\frac{d\sigma}{r_1}, \quad (6)$$

где

$$r_1=2\sin\frac{\psi}{2}.$$

После подстановки (6) в (1) и некоторых преобразований получаем формулу Бровара [4]

$$-h=\frac{a}{4\pi g}\int\Delta g[S(\psi)-1]d\sigma+\frac{W_0-V_0}{g}+(h)_1, \quad (7)$$

определяющую фигуру Земли с учетом величин $m$-го порядка малости. При условиях равенства масс нормальной и реальной Земли и $(h)_1=0$ формула (7) приводится к формуле Пицетти. Далее, принимая $W_0=V_0$, получаем формулу Стокса [4].

Итак, формулы Стокса, Пицетти и Бровара остаются без изменения при определении фигуры планеты с любой степенью точности. Однако при применении этих формул возникают трудности теоретического характера, связанные с решением проблемы Стокса для сложной в математическом отношении поверхности отсчета $s$, т. е. при определении величин $\gamma$ и $V_0$.

* Приведение формулы (1) к виду, удобному для применений без использования понятия о нормальном поле, а также ее проверка на модели выполнены в работе [5].



Приведенное доказательство точности, которую обеспечивают упомянутые формулы классической теории фигуры Земли, проверено на модели. В качестве модели были приняты поверхности двух сжатых эллипсоидов вращения $\Sigma_1$ и $\Sigma$. Из решения проблемы Стокса для эллипсоида были найдены $g$, $W_0$ и $\gamma$, $V_0$ с учетом малых величин третьего порядка. После подстановки этих величин в формулу (7) и некоторых преобразований элементы гравитационного поля исключились, и полученное выражение для $h$ совпало с его геометрическим значением, полученным как разность радиусов-векторов эллипсоидов. Таким же путем были проверены формулы Пицетти и Стокса. При этом, конечно, необходимо было выполнить известные требования, предъявляемые к нормальным полям, фигурирующим в этих формулах.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н. К. Мигаль. Теория совместного определения фигур и размеров Земли. Научные записки ЛПИ, серия геодезическая № 1, Львов, 1949.
2. Н. К. Мигаль. К вопросу определения фигуры Земли без использования нормального гравитационного поля. Научные записки ЛПИ, серия геодезическая № 5, Львов, 1959.
3. М. И. Марыч. Новый вывод формулы Н. К. Мигаля, определяющей фугуру Земли. Известия высших учебных заведений, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка» № 4, 1961.
4. М. И. Марыч. Сопоставление формул, предложенных для определения фигуры Земли. Известия высших учебных заведений, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка» № 3, 1962.
5. М. И. Марыч. Об определении фигуры Земли с учетом малых величин третьего порядка. Известия высших учебных заведений, раздел «Геодезия и аэрофотосъемка» № 3, 1963.
6. П. Пицетти. Основы механической теории фигуры планет. ГТТИ, 1933.


Львовский политехнический институт

Работа поступила 21 мая 1964 г.