

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ТРАССИРОВАНИЯ

Известно, что при проектировании железных дорог, линий электропередач, каналов приходится составлять несколько вариантов линий возможного прохождения трассы между двумя определенными пунктами.

Очевидно, что где-то на местности существует кратчайшая линия или, как ее называют, геодезическая, соединяющая два этих исходных (начальный и конечный) пункта трассирования. Нельзя, конечно, утверждать, что вариант вдоль геодезической линии будет всегда оптимальным, но очевидно, что искомый оптимальный вариант не должен сильно отклоняться от геодезической линии.

Поэтому получение какой-либо информации о расположении геодезической, проходящей через наши два исходных пункта трассирования, есть в то же время и информация относительно оптимального варианта трассы.

Известен математический метод определения геодезических линий поверхностей, которые заданы некоторыми уравнениями. Этот метод связан с классической задачей вариационного исчисления, которая приводится к интегрированию системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, интегрирование которых связано (с практической точки зрения) с большой затратой труда. Кроме того, на практике мы часто имеем дело не с уравнением некоторой поверхности, а с таблицей координат отдельных ее точек (в случае топографической съемки) или с топографической картой. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы проектировщику, не располагающему в самой начальной стадии проектирования никакими данными, кроме топографической карты, дать представление о возможном расположении геодезической, соединяющей два пункта этой карты.

Эта информация о расположении геодезической состоит из двух частей.

Вначале определяется некоторая ограниченная область карты, содержащая два исходных пункта трассирования, та-

кая, что в ней обязательно содержится искомая геодезическая.

Далее эта область постепенно сужается, т. е. тем самым уточняется расположение этой геодезической.

Для определения ограниченной области  $M$ , которая содержит геодезическую, соединяющую две данные точки  $A$  и  $B$  карты, поступают следующим образом.

Соединяют на карте две данные точки  $A$  и  $B$  прямой. Вдоль этой прямой определяют длину линии по продольному профилю между  $A$  и  $B$ .

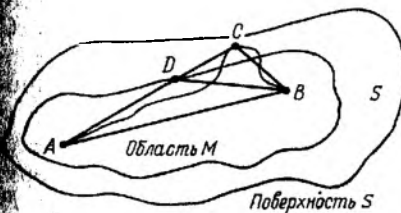


Рис. 1.

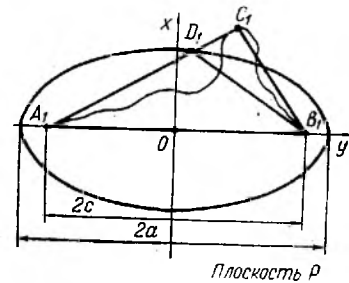


Рис. 2.

Пусть длина по прямой  $AB$  на карте будет  $2c$ , а длина по продольному профилю  $2a$ . Продолжим на карте прямую  $AB$  между  $A$  и  $B$  на равные расстояния  $A'A = BB'$  так, чтобы  $A'B' = 2a \geq 2c$ .

Тогда, построив на карте эллипс, большая ось которого равна  $A'B' = 2a$  и фокусы которого расположены в исходных точках трассирования  $A$  и  $B$ , мы и получим искомую область  $M$ , ограниченную дугой этого эллипса, внутри которого должна быть расположена линия, кратчайшим образом соединяющая точки  $A$  и  $B$ .

Покажем, что это действительно так.

Рассмотрим рис. 1, на котором изображена физическая поверхность  $S$ , т. е. та реальная местность, которая ортогонально проектируется на плоскость  $P$ , проходящую через  $O$  (сердину отрезка  $AB$ ), перпендикулярно к отвесной линии в этой точке  $O$ . На этом рисунке изображены две исходные точки трассирования:  $A$  и  $B$ , находящиеся на поверхности  $S$ .

Если через точки  $A$  и  $B$  провести сечение плоскостью, перпендикулярное к плоскости  $P$ , обозначить длину линии  $AB$  вдоль этого сечения (по поверхности  $S$ ) через  $2a$ , спроектировать точки  $A$  и  $B$  на плоскость  $P$  (на рис. 2 проекции точек  $A$  и  $B$  обозначены через  $A_1$  и  $B_1$ ) и взять точки  $A$  и  $B$  за фокусы эллипса, то можно построить эллипс на плоскости  $P$ , взяв за его большую ось величину  $2a$ .

Если же после этого, взяв данный эллипс за направляющую, проведем через него цилиндрическую поверхность  $S_1$ , образующие которой перпендикулярны к плоскости  $P$ , то эта цилиндрическая поверхность  $S_1$ , пересекаясь с поверхностью  $S$ , и дает в сечении линию, ограничивающую искомую область  $M$  (поверхности  $S$ ), внутри которой находятся точки  $A$  и  $B$  и геодезическая линия, соединяющая эти точки.

Предположим, что это не так, т. е. что геодезическая, соединяющая  $A$  и  $B$  (по поверхности  $S$ ), выходит из области  $M$  (см. рис. 1) поверхности  $S$ . Возьмем какую-либо точку  $C$ , находящуюся на геодезической линии  $ACB$  вне области  $M$ . Проведем три плоскости, перпендикулярные к горизонтальной плоскости  $P$ : через  $A$  и  $C$ , через  $C$  и  $B$ , через  $D$  и  $B$ , где  $D$  — точка пересечения плоскости, проходящей через  $A$  и  $C$  (перпендикулярно  $P$ ), с линией контура области  $M$ .

Спроектируем точки  $D$  и  $C$  на плоскость  $P$  и там их проекции обозначим через  $D_1$  и  $C_1$ .

Взяв геодезическую линию  $ACB$  (на рис. 1 — кривая) за направляющую, проведем через нее цилиндрическую поверхность, образующие которой перпендикулярны к плоскости  $P$ . Эта цилиндрическая поверхность спроектирует геодезическую  $ACB$  на плоскость  $P$  так, что на этой плоскости кривая  $A_1C_1B_1$  будет проекцией  $ACB$ , а точка  $C_1$  (проекция точки  $C$ ) будет расположена вне эллипса (см. рис. 2).

Пусть длина геодезической  $ACB$  на поверхности  $S$  будет  $g$ , а длина ее проекции  $A_1C_1B_1$  (кривая) будет  $g_1$ .

$$\text{Имеем } g_1 \leq g. \quad (1)$$

Так как  $A_1C_1 < \widetilde{A_1C_1}$  и  $C_1B_1 < \widetilde{C_1B_1}$  (знак  $\sim$  показывает, что расстояние между данными точками берется по дуге, а без этого знака расстояние между данными точками берется по прямой), то

$$A_1C_1 + C_1B_1 < \widetilde{A_1C_1} + \widetilde{C_1B_1} = g_1, \quad (2)$$

далее  $D_1B_1 < D_1C_1 + C_1B_1$  и поэтому

$$A_1D_1 + D_1B_1 < A_1C_1 + C_1B_1. \quad (3)$$

Но так как  $D_1$  лежит на дуге эллипса, то

$$A_1D_1 + D_1B_1 = 2a. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) получаем

$$2a = A_1D_1 + D_1B_1 < A_1C_1 + C_1B_1 < g_1, \quad (5)$$

т. е.  $2a < g_1$  и вследствие (1)

$$2a < g. \quad (6)$$

Но ведь  $2a$  — это длина линии между  $A$  и  $B$ , проведенная по поверхности  $S$ , а она оказывается короче геодезической (между теми же точками), что невозможно, и поэтому невозможно предположить, что геодезическая, соединяющая  $A$  и  $B$  по поверхности  $S$ , выходит из области  $M$ .

Приведенное рассуждение остается в силе, если вместо плоскости  $P$  взять топографическую карту и в ее плоскости выполнить те построения, которые мы осуществляем на  $P$ .

Действительно, если некоторую ограниченную область  $M^1$  поверхности  $S$  спроектировать на плоскость  $P$  и если  $M_1'$  будет проекцией  $M_1$  на плоскость  $P$ , а с другой стороны, если эту область  $M_1$  спроектировать на уровенную поверхность, а затем осуществить для этой области  $M_1$  ее дальнейшую картографическую проекцию (например, конформную поперечноцилиндрическую проекцию) на плоскость карты, то в этой плоскости область  $M_1$  поверхности  $S$  будет отображена в виде некоторой замкнутой области  $M''$ , которая по величине будет больше области  $M_1'$  плоскости  $P$ , так как линии уровенной поверхности редуцируются на плоскость карты, т. е. соответственно увеличиваются.

Далее в процессе работы проектировщика по выбору возможных вариантов трассы область нахождения геодезической постепенно уточняется.

Допустим, что проектировщик внутри нашего эллипса на карте наметил некоторый вариант  $V_1$  (здесь и в дальнейшем под словом «вариант» мы будем понимать вариант возможного расположения трассы на карте) и в связи с этим определил длину линии по продольному профилю вдоль этого варианта  $V_1$ ; пусть эта длина будет равна  $l_1$ , и предположим, что  $l_1 < 2a$ . Но тогда (по доказанному выше) геодезическая, соединяющая  $A$  и  $B$  по поверхности  $S$ , должна находиться внутри эллипса с фокусами в точках  $A$  и  $B$  и с большой осью, равной  $l_1$ , т. е. внутри эллипса, который сам расположен внутри предыдущего эллипса с большой осью  $2a$ .

Таким образом, как только какая-либо линия вдоль продольного профиля, рассматриваемого проектировщиком, оказывается короче предыдущих (в рассмотренных ранее вариантах), то эксцентриситет эллипса опять увеличивается, эллипс еще более стягивается. Исходя из этого, следует поступать так. Допустим, что проектировщик наметил на карте десять возможных вариантов прохождения трассы. Так как по каждому варианту все равно придется определять длину соответствующей трассы, то лучше это сделать сразу для всех десяти вариантов и построить на карте эллипс (с фокусами в исходных точках  $A$  и  $B$ ), взяв за длину его большой оси минимальную длину (по продольному профилю) из этих десяти длин трасс.

Если, например, шесть трасс окажутся внутри этого эллипса, две будут сильно выходить из него и две незначительно отклоняться, то вряд ли среди двух сильно отклоняющихся трасс следует искать вариант, близкий к оптимальному.

Необходимо заметить, что при значительном расстоянии между исходными пунктами *A* и *B* при подсчете длины варианта трассы необходимо учитывать поправки за редукцию (если берем координаты точек линий по карте).

Указанный выше прием получения информации о нахождении геодезической на карте, как видно из рассмотренного, ни в какой мере не заменяет обычных методов и приемов выбора оптимального варианта трассы, но без затраты дополнительного труда (не считая нанесения эллипса на карту) дает проектировщику одно из дополненных соображений (и, по нашему мнению, существенных) относительно выбора оптимального варианта трассы.

Днепропетровский  
металлургический  
институт

Работа поступила  
22 мая 1964 г.

А. Г. ЧУИЧ

## О КАТАЛОГЕ КООРДИНАТ ТОЧЕК ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Известно, что цель проектировщика при проектировании железных дорог, водных каналов, трубопроводов и т. д. состоит в получении оптимального варианта трассы объекта проектирования. Выбор оптимального варианта определяется анализом той информации, которую проектировщик получает в результате предварительно нанесенных на карту возможных вариантов трассы. Однако эта информация существенно расширяется и анализ уточняется, если мы знаем расположение геодезической линии, соединяющей два исходных пункта трассирования на топографической карте. Здесь (и в дальнейшем) под геодезической линией мы понимаем кратчайшую линию, соединяющую две данные точки поверхности (местности), которая отвечает данной топографической карте.

Действительно, во-первых, наиболее вероятно, что минимум строительных затрат будет при выборе трассы вдоль геодезической линии, а во-вторых, если это даже не так, то всякому варианту, намеченному проектировщиком с помощью обычных приемов, может отвечать вариант прохождения геодезической между каждыми двумя точками тех нескольких определенных точек, через которые должна проходить трасса, намеченная проектировщиком. Поэтому всякая информация относительно положения геодезической есть и информация относительно оптимального варианта трассирования.

Следует заметить, что приведенные рассуждения (о выборе трассы вдоль геодезической линии) имеют практическое значение только для горной или сильно холмистой местности. Для местности равнинной или мало холмистой на топографической карте (в проекции Гаусса—Крюгера) геодезические линии на большом расстоянии практически можно считать прямыми. Но в горной местности (или сильно холмистой) проекции этих геодезических линий на топографической карте будут изображаться, как правило, в виде сложных кривых.

Предположим, что мы имеем участок горной местности размером  $200 \times 100$  км, на котором насчитывается 100 триан-