

УДК 528.7.001

Ю. М. ТРУНИН

## НЕКОТОРЫЕ ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ<sup>1</sup> АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ

В 1940 г. Н. А. Урмаев [6] впервые составил ряд векторных уравнений фотограмметрии. В данное время приемы использования векторного исчисления в фотограмметрии получили дальнейшее развитие [3], [4].

В данной статье приводится ряд новых векторных уравнений. Они изложены в порядке построения фототриангуляционной сети. В параграфах 6 и 7 выведены уравнения, учитывающие некоторые систематические ошибки сети. Вопросам уравнивания, установлению весов функций внимание не уделяется. Однако описываемые пути решения задач (метод Ньютона) всегда позволяют переход к построению систем нормальных уравнений.

### 1. ПОВОРОТ СВЯЗКИ ЛУЧЕЙ

Направление луча связки характеризуют обычно вектором, модуль которого может быть произвольным, но отличным от нуля. Из матричного исчисления, а также из тензорного анализа известно [2], что поворот системы векторов  $r_i$  с общим началом представляется зависимостью

$$Pr_i = r_i + [\omega_x r_i] + \frac{1}{2!} \omega_x [\omega_x r_i] + \frac{1}{3!} \omega_x [\omega_x [\omega_x r_i]] + \dots = e^A \cdot r_i, \quad (1)$$

где  $r_i$  — векторы до поворота;  $Pr_i$  — векторы после поворота;  $P$  — оператор поворота, который характеризуется ортогональной матрицей;  $\omega$  — вектор, три составляющих ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ) которого определяют поворот;  $A$  — антисимметрическая матрица.

Для аналитической фотограмметрии формулу (1) можно рекомендовать вместо дробно-линейных функций трансформирования координат точек аэроснимка. Основанием для этого является:

сравнительная простота записи формулы;  
преимущества программирования, которые сводятся к последовательности применения подпрограммы векторного произведения векторов;

отсутствие «мертвой зоны», возникающей при использовании дробно-линейной функции, когда знаменатель становится равным нулю.

<sup>1</sup> Матричное и тензорное исчисления являются более общими, чем векторное исчисление. Однако эти исчисления связаны, поэтому векторное исчисление (векторные уравнения) следует понимать широко, например, как у Я. С. Дубнова [1].



## 2. ВЗАИМНОЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ АЭРОСНИМКОВ МЕТОДОМ ОБРАЗОВАНИЯ ПУЧКОВ ПЛОСКОСТЕЙ

При фотографировании объекта с двух точек ( $S_1$  и  $S_2$ ) наблюдается пучок плоскостей (рис. 1). Каждая плоскость пучка определяется двумя идентичными векторами  $r_i$  и  $r_i'$  (см. рис. 1).

Пучок плоскостей в аналитической форме можно представить системой равенств:

$$\begin{array}{lll} r_1 \times r_1' & r_2 \times r_2' & r_3 \times r_3' = 0, \\ r_2 \times r_2' & r_3 \times r_3' & r_4 \times r_4' = 0, \\ r_3 \times r_3' & r_4 \times r_4' & r_5 \times r_5' = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (2)$$

В общем случае компоненты  $x_i, y_i$  и  $x_i', y_i'$  векторов  $r_i$  и  $r_i'$  измеряют по аэроснимкам, взаимное ориентирование которых различно от взаимного ориентирования момента фотографирования.

По этой причине векторы с измеренными компонентами не позволяют образовать систему равенств (2), так как пучок плоскостей разрушен. Для

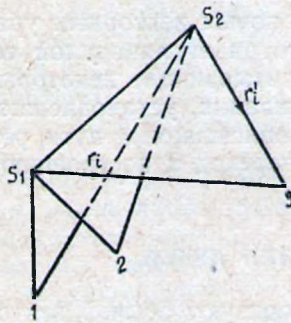


Рис. 1. Пучок плоскостей при фотографировании объекта с двух точек.

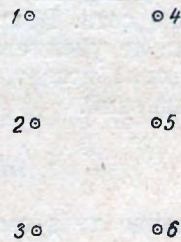


Рис. 2. Нумерация точек для конструирования векторов  $W$  и скаляров  $l$ .

восстановления пучка достаточно повернуть один аэроснимок по отношению к другому. Аналитически восстановление пучка можно представить системой следующих уравнений:

$$\begin{array}{lll} r_1 \times Pr_1' & r_2 \times Pr_2' & r_3 \times Pr_3' = 0, \\ r_2 \times Pr_2' & r_3 \times Pr_3' & r_4 \times Pr_4' = 0, \\ r_3 \times Pr_3' & r_4 \times Pr_4' & r_5 \times Pr_5' = 0, \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (3)$$

где  $P$  — оператор поворота, который в соответствии с формулой (1) можно выразить через три независимых параметра ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) вектора  $\omega$ .

Желание определить вектор приводит к задаче взаимного ориентирования. Для ее решения необходимо из системы (3) выбрать минимум три уравнения по числу неизвестных. Уравнения (3) трансцендентны. Решение системы трансцендентных уравнений осуществляют обычно методом Ньютона. Для этого необходимо знать линейризованный вид уравнений (3), который можно получить, подставив вместо  $Pr_i'$  линейную часть его значения из формулы (1). Имеем:

$$r_1 \times (r_1' + \omega \times r_1') \quad r_2 \times (r_2' + \omega \times r_2') \quad r_3 \times (r_3' + \omega \times r_3') = 0 \quad (4)$$



или, выполнив смешанные произведения, сохраняя члены первого порядка малости, получим:

$$\omega \{ r_1' \times [r_1 \times [r_2 \times r_2' r_3 \times r_3']] + r_2' \times [r_2 \times [r_3 \times r_3' r_1 \times r_1']] + r_3' \times [r_3 \times [r_1 \times r_1' r_2 \times r_2']] \} = r_1 \times r_1' r_2 \times r_2' r_3 \times r_3'. \quad (5)$$

Обозначая вектор в фигурных скобках через  $W_{123}$ , а свободный член — через  $l_{123}$ , систему (3) можно представить в линеаризированном виде:

$$\omega \cdot W_{123} = l_{123}, \quad \omega \cdot W_{234} = l_{234}, \quad \omega \cdot W_{345} = l_{345} \quad (6)$$

Для конструирования векторов  $W$  и скаляров  $l$  целесообразная нумерация точек в пределах перекрытия смежных аэроснимков приводится на рис. 2.

Формул (1) и (6) достаточно для решения задачи методом Ньютона. Основным преимуществом уравнений (6) является их независимость от параметров  $r$  и  $\gamma$  базиса фотографирования, что позволяет решать задачу и выполнять уравнивание с произвольными значениями этих величин, например, когда базис вертикален. Известное уравнение взаимного ориентирования  $BrPr' = 0$  не может для общего случая сводиться к линейному виду. Может быть получено билинейное уравнение, включающее члены  $\tau\omega$  и т. д. Только для планового случая съемки такого вида члены становятся членами второго порядка малости и уравнение сводится к линейному с пятью неизвестными.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Направление базиса  $B$  фотографирования (ребра пучка плоскостей) может быть определено по формуле

$$B = [r_1 \times Pr_1'] \times [r_2 \times Pr_2'] \frac{1}{|[r_1 \times Pr_1'] \times [r_2 \times Pr_2']|}, \quad (7)$$

которая определяет направление  $B$  как пересечение двух плоскостей пучка. Векторы  $\Phi_i$  фотограмметрической модели могут быть определены из уравнения

$$\Phi_i = N_i r_i \quad (8)$$

где  $N_i$  — скаляры;  $r_i$  — векторы, заданные координатами  $x_i, y_i, z_i = -f$  точек аэроснимка.

Значение скаляров  $N_i$  определяется из построений на рис. 3. Как следует из построений, приведенных на рис. 3,

$$N_i r_i - B = N_i' \cdot Pr_i'. \quad (9)$$

Умножая векторно равенство (9) на  $Pr_i'$ , получим:

$$N_i r_i \times Pr_i' - B \times Pr_i' = 0. \quad (10)$$

Умножая равенство (10) скалярно на  $r_i \times Pr_i'$ , находим

$$N_i (r_i \times Pr_i')^2 - (B \times Pr_i') \cdot (r_i \times Pr_i') = 0. \quad (11)$$

Подставляя значение  $B$  из формулы (7), скаляр  $N_i$  представим в виде дроби

$$N_i = \frac{||r_1 \times Pr_1' r_2 \times Pr_2'|| \times Pr_i' \cdot (r_i \times Pr_i')}{(r_i \times Pr_i')^2 ||r_1 \times Pr_1' r_2 \times Pr_2'||}. \quad (12)$$

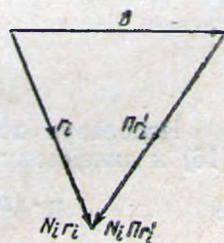


Рис. 3. Построения для определения скаляров  $N_i$ .



Другой вид формула (12) получит, если индекс 2 заменить индексом  $i$ . После преобразований будем иметь

$$N_i = \frac{r_i \times \Pi r_i' \Pi r_i'}{|[r_i \times \Pi r_i'] \times [r_i \times \Pi r_i']|}. \quad (13)$$

Формулой (13) можно пользоваться, когда точки  $l$  и  $i$  лежат в разных плоскостях пучка, составляющих двугранный угол больше  $30^\circ$ . Положительное свойство формул (12) и (13) в том, что  $N_i$  инвариантно (не зависит) относительно внешнего ориентирования модели.

#### 4. ВНЕШНЕЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ МОДЕЛИ

Масштаб модели может быть определен по формуле

$$\frac{1}{m} = \frac{|\Phi_2 - \Phi_1|}{|\Gamma_2 - \Gamma_1|}, \quad (14)$$

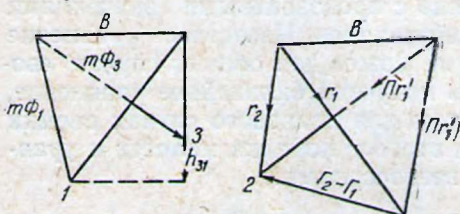


Рис. 4. Построения, иллюстрирующие условия сорентированной модели.

где  $|\Gamma_2 - \Gamma_1|$  — модуль вектора, заданного приращениями  $\Delta y_{21}$ ,  $\Delta x_{21}$ ,  $h_{21}$  геодезических координат.

Если представить модель сорентированной (рис. 4), то должны иметь место равенства:

$$(m\Phi_3 - m\Phi_1) \cdot k = h_{31},$$

$$r_1 \times r_2 (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0, \quad (15)$$

$$\Pi r_1' \times \Pi r_2' (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0,$$

где  $k$  — орт оси  $z$ .

Левая часть первого равенства в (15) определяет проекцию вектора  $m\Phi_3 - m\Phi_1$  на ось  $z$ . Два других равенства в (15) определяют компланарность векторов  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\Gamma_2 - \Gamma_1$  и векторов  $\Pi r_1'$ ,  $\Pi r_2'$ ,  $\Gamma_2 - \Gamma_1$ . Нарушение внешнего ориентирования модели влечет нарушение равенств (15). Для их восстановления достаточно подействовать оператором поворота  $\Pi$  на векторы  $m\Phi_3 - m\Phi_1$ ,  $r_1 \times r_2$ ,  $\Pi r_1' \times \Pi r_2'$ . Тогда получим:

$$\Pi (m\Phi_3 - m\Phi_1) \cdot k = h_{31},$$

$$\Pi r_1 \times r_2 \cdot (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0, \quad (16)$$

$$\Pi \Pi r_1' \times \Pi r_2' (\Gamma_2 - \Gamma_1) = 0.$$

Используя прием получения формулы (5), приведем уравнения (16) к линейному виду:

$$\eta \cdot (m\Phi_3 - m\Phi_1) \times k = -(m\Phi_3 - m\Phi_1) \cdot k + h_{31},$$

$$\eta \cdot [r_1 \times r_2] \times (\Gamma_2 - \Gamma_1) = r_1 r_2 (\Gamma_2 - \Gamma_1), \quad (17)$$

$$\eta \cdot [\Pi r_1' \times \Pi r_2'] \times (\Gamma_2 - \Gamma_1) = \Pi r_1' \Pi r_2' (\Gamma_2 - \Gamma_1),$$

где  $\eta$  — вектор, характеризующий оператор  $\Pi$  по аналогии с формулой (1).

Системы уравнений (17) и формулы типа (1) достаточно для решения задачи методом Ньютона. При этом поворот векторов  $\Phi_i$  осуществляется поворотом векторов  $r_i$  и умножения их на скаляры  $N_i$ , так как последние инвариантны по отношению к внешнему ориентированию модели.



## 5. ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ

По отношению к начальной связке с лучами  $r_i^0$  ориентируют смежную связку с лучами  $r_i^1$ . Получают взаимно сориентированную связку с лучами  $\Pi_1 r_i^1$ . Третью связку с лучами  $r_k^2$  ориентируют по отношению к связке с лучами  $\Pi_1 r_k^1$ , получают связку с лучами  $\Pi_2 r_k^2$  и т. д.

Точку в тройном перекрытии аэроснимков используют для постро-

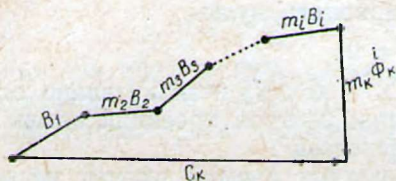


Рис. 5. Построение вектора  $C_k$  сети.

ения общего вектора двух смежных моделей. Обозначив этот вектор для начальной модели через  $\Phi_i^1$ , для смежной модели через вектор  $\Phi_i^2$ , определяют масштаб смежной модели по формуле

$$\frac{1}{m_2} = \frac{|\Phi_i^2|}{|\Phi_i^1|}. \quad (18)$$

Аналогично определяют масштабы последующих моделей. Определив базисы  $B_i$  моделей по формуле (7) и умножив их на соответствующие масштабные коэффициенты, можно определить вектор  $C_k$  сети, сообразуясь с рис. 5.

Исходя из построений на рис. 5, найдем вектор  $C_k$  сети

$$C_k = B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 + \dots + m_i B_i + m_k \Phi_k^i. \quad (19)$$

По формуле типа (19) можно определить любое количество векторов сети. Внешнее ориентирование сети выполняется по аналогии с внешним ориентированием модели. Такова схема построения сети.

## 6. УЧЕТ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ АЭРОСНИМКОВ ПРИ ВЗАИМНОМ ОРИЕНТИРОВАНИИ

При написании формул (2)–(5) предполагалось, что вершины связок при взаимном ориентировании совпадают с началом координат аэроснимков. В противном случае векторы  $r_i$  будут смещены на вектор  $\delta$ , а векторы  $r_i^1$  — на вектор  $\delta'$ . Тогда вместо уравнения системы (3) будет иметь место уравнение

$$[(r_1 + \delta) \times \Pi(r_1' + \delta')] [(r_2 + \delta) \times \Pi(r_2' + \delta')] [(r_3 + \delta) \times \Pi(r_3' + \delta')] = 0, \quad (20)$$

или в линеаризованном виде

$$\delta \Delta_{123} + \omega W_{123} - \delta' \Delta'_{123} = l_{123}, \quad (21)$$

где

$$\Delta_{123} = r_1' \times [r_2 \times r_2' r_3 \times r_3'] + r_2' \times [r_3 \times r_3' r_1 \times r_1'] + r_3' \times [r_1 \times r_1' r_2 \times r_2'],$$

$$\Delta'_{123} = r_1 \times [r_2 \times r_2' r_3 \times r_3'] + r_2 \times [r_3 \times r_3' r_1 \times r_1'] + r_3 \times [r_1 \times r_1' r_2 \times r_2'],$$

Для планового случая съемки компоненты векторов  $\Delta$  и  $\Delta'$  на оси  $Y$  и  $Z$  можно считать равными, то есть

$$\begin{aligned} \Delta_Y &\approx \Delta' Y, \\ \Delta_Z &\approx \Delta' Z, \end{aligned} \quad (22)$$



поэтому из четырех составляющих  $\delta_y$  и  $\delta_y'$ ,  $\delta_z$  и  $\delta_z'$  образуются две разности

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_y &= \delta_y - \delta_y'; \\ \tilde{\delta}_z &= \delta_z - \delta_z'.\end{aligned}\quad (23)$$

Компоненты  $\delta_x$  и  $\delta_x'$  можно приравнять нулю

$$\delta_x = \delta_x' = 0, \quad (24)$$

так как направление базиса  $B \approx [r_1 \times r_1' \ r_2 \times r_2']$  незначительно отличается от направления оси  $X$  и смещения центров проекций вдоль этого направления не нарушает пучка плоскостей<sup>2</sup>.

Таким образом, для планового случая съемки вместо уравнения (20) можно записать уравнение

$$r_1 \times \Pi(r_1' + \delta) \ r_2 \times \Pi(r_2' + \delta) \ r_3 \times \Pi(r_3' + \delta) = 0, \quad (25)$$

где  $\delta_x = 0$ .

Запишем (25) в линейном виде

$$\omega W_{123} + \delta \Delta_{123} = l_{123}, \quad (26)$$

где  $\Delta_{123} = r_1 \times [r_2 \times r_2' \ r_3 \times r_3'] + r_2 \times [r_3 \times r_3' \ r_1 \times r_1'] + r_3 \times [r_1 \times r_1' \ r_2 \times r_2']$ , при этом  $(\Delta_{123})_x = 0$ .

Уравнения (25) и (26) с пятью неизвестными. Для решения задачи необходимы измерения на семи точках.

## 7. ВЗАИМНОЕ ОРИЕНТИРОВАНИЕ ТРЕХ СМЕЖНЫХ АЭРОСНИМКОВ

При фотографировании объекта с трех точек имеет место пучок плоскостей (рис. 6) с ребром, проходящим через две точки ( $A$  и  $B$ ) объекта.

Условие образования этого пучка в аналитической форме принимает следующий вид:

$$r_a^0 \times r_b^0 \ r_a' \times r_b' \ r_a^2 \times r_b^2 = 0, \quad (27)$$

где верхние индексы векторов обозначают номер связки. При измерении компонентов векторов взаимное ориентирование аэроснимков нарушается и пучок разрушается. Для его восстановления на векторы с индексом 1 подействуем оператором  $\Pi_1$ , а на векторы с индексом 2 — оператором  $\Pi_2$ .

Учитывая также смещения  $\delta^0$ ,  $\delta^1$ ,  $\delta^2$  вершин связок относительно начала координат, запишем условие взаимного ориентирования трех смежных аэроснимков в виде:

$$(r_a^0 + \delta^0) \times (r_b^0 + \delta^0) \ \Pi_1(r_a^1 + \delta^1) \times (r_b^1 + \delta^1) \ \Pi_2(r_a^2 + \delta^2) \times (r_b^2 + \delta^2) = 0, \quad (28)$$

или в линеаризованном виде:

$$\delta^0 \nabla_{ab}^0 + \omega_1 M_{ab}^1 + \delta \nabla_{ab}^1 + \omega_2 M_{ab}^2 + \delta^2 \nabla_{ab}^2 = l_{ab}^{012}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_{ab}^0 &= (r_b^0 - r_a^0) \times [r_a' \times r_b' \ r_a^2 \times r_b^2] + (r_b^1 - r_a^1) \times [r_a^2 \times r_b^2 \ r_a^0 \times r_b^0] + \\ &+ (r_b^2 - r_a^2) \times [r_a^0 \times r_b^0 \ r_a' \times r_b'];\end{aligned}$$

<sup>2</sup> В то же время смещения  $\delta_x$  и  $\delta_x'$  деформируют модель. Поэтому они должны, как и  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ , быть известны с высокой степенью точности.



$$\begin{aligned}
 M'_{ab} &= [r'_a \times r'_b] \times [r_a^2 \times r_b^2 \quad r_a^0 \times r_b^0] + [r_a^2 \times r_b^2] \times [[r_a^0 \times r_b^0] \times [r'_a \times r'_b]]; \\
 \nabla'_{ab} &= (r'_b - r'_a) \times [r_a^2 \times r_b^2 \quad r_a^0 \times r_b^0] + (r_b^2 - r_a^2) \times [r_a^0 \times r_b^0 \quad r'_a \times r'_b]; \\
 M^2_{ab} &= [r_a^2 \times r_b^2] \times [[r'_a \times r'_b] \times [r'_a \times r'_b]]; \\
 \nabla^2_{ab} &= (r_b^2 - r_a^2) \times [[r_a^0 \times r_b^0] \times [r'_a \times r'_b]]; \\
 l^{012}_{ab} &= r_a^0 \times r_b^0 \quad r'_a \times r'_b \quad r_a^2 \times r_b^2.
 \end{aligned}$$

Уравнения (28) и (29) включают 15 неизвестных, которые можно определить, если системы из такого типа уравнений решать совместно с системами уравнений типа (19), (20). В порядке иллюстраций

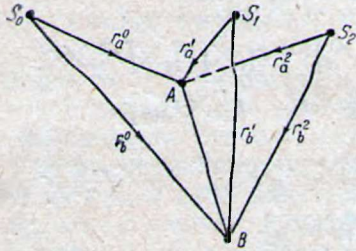


Рис. 6. Пучок плоскостей при фотографировании объекта с трех точек.

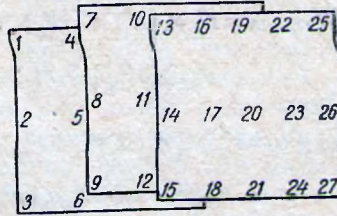


Рис. 7. Система нумерации точек при взаимном ориентировании трех смежных аэроснимков.

составим комбинированную систему уравнений. Для конструирования векторов и свободных членов уравнений примем систему нумерации точек аэроснимков в соответствии с рис. 7.

В соответствии с рис. 7 векторы-коэффициенты при неизвестных векторах и свободные члены уравнений получают конкретные значения индексов. Матрица векторов и свободных членов может быть записана в виде:

$$\begin{aligned}
 &1. \quad \Delta^0_{789} \quad W'_{789} \quad \Delta'_{789} \quad 0 \quad 0 \quad l^{01}_{789}, \\
 &2. \quad \Delta^0_{89,10} \quad W'_{89,10} \quad \Delta'_{89,10} \quad 0 \quad 0 \quad l^{01}_{89,10}, \\
 &3. \\
 &4. \\
 &5. \\
 &6. \\
 &7. \quad \Delta^0_{13,14,15} \quad W'_{13,14,15} \quad \Delta'_{13,14,15} \quad 0 \quad 0 \quad l^{01}_{13,14,15}, \\
 &8. \quad 0 \quad 0 \quad \Delta'_{13,14,15} \quad W^2_{13,14,15} \quad \Delta^2_{13,14,15} \quad l^{12}_{13,14,15}, \\
 &9. \quad 0 \quad 0 \quad \Delta'_{14,15,16} \quad W^2_{14,15,16} \quad \Delta^2_{14,15,16} \quad l^{12}_{14,15,16}, \\
 &10. \\
 &11. \\
 &12. \\
 &13. \\
 &14. \quad 0 \quad 0 \quad \Delta'_{19,20,21} \quad W^2_{19,20,21} \quad \Delta^2_{19,20,21} \quad l^{12}_{19,20,21}, \\
 &15. \quad \nabla^0_{13,14} \quad M'_{13,14} \quad \nabla'_{13,14} \quad M^2_{13,14} \quad \nabla^2_{13,14} \quad l^{012}_{13,14}, \\
 &16. \quad \nabla^0_{13,15} \quad M'_{13,15} \quad \nabla'_{13,15} \quad M^2_{13,15} \quad \nabla^2_{13,15} \quad l^{012}_{13,25}.
 \end{aligned} \tag{30}$$



Строчки 15 и 16 матрицы (30) получены построением пучков с ребрами, приблизительно перпендикулярными ребрам пучков, соответствующим строчкам 1—14. Поэтому с геометрической точки зрения, система уравнений, соответствующая матрице (30), хорошо обусловлена.

Если, наряду с принятыми приемами измерения координат точек аэроснимков, выполнить измерения на точках 13, 14, 15 через снимок, то к матрице (30) можно добавить еще одну строку.

$$\tilde{\Delta}_{13,14,15}^0 \quad \tilde{W}_{13,14,15} \quad \tilde{\Delta}_{13,14,15} \quad \tilde{W}_{13,14,15} \quad \tilde{\Delta}_{13,14,15} \quad l_{13,14,15}^0, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{13,14,15}^0 = r_{13}^2 \times [r_{14}^0 \times r_{14}^2 \quad r_{15}^0 \times r_{15}^2] + r_{14}^2 [r_{15}^0 \times r_{15}^2 \quad r_{13}^0 \times r_{13}^2] + r_{15}^2 \times [r_{13}^0 \times r_{13}^2 \quad r_{14}^0 \times r_{14}^2];$$

$$\tilde{W}_{13,14,15} = r_{13}^2 \times [r_{13}^0 \times [r_{14}^0 \times r_{14}^2 \quad r_{15}^0 \times r_{15}^2]] + r_{14}^2 \times [r_{14}^0 \times [r_{15}^0 \times r_{15}^2 \quad r_{13}^0 \times r_{13}^2]] + r_{15}^2 \times [r_{15}^0 \times [r_{13}^0 \times r_{13}^2 \quad r_{14}^0 \times r_{14}^2]];$$

$$\tilde{\Delta}_{13,14,15} = r_{13}^0 \times [r_{14}^0 \times r_{14}^2 \quad r_{15}^0 \times r_{15}^2] + r_{14}^0 \times [r_{15}^0 \times r_{15}^2 \quad r_{13}^0 \times r_{13}^2] + r_{15}^0 \times [r_{13}^0 \times r_{13}^2 \quad r_{14}^0 \times r_{14}^2].$$

Строчка (31) получена на основании построения пучка плоскостей через снимок.

Таким образом, результаты измерений координат точек (7—15) на трех смежных аэроснимках позволяют составить 17 уравнений для определения 15 неизвестных. Появляется возможность решать задачу по способу наименьших квадратов.

На основе вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

Полезность векторных алгоритмов для аналитической фотограмметрии заключается:

а) в сравнительной простоте и однотипности построения уравнений из геометрических соображений;

б) в сравнительной простоте программирования векторных алгоритмов;

в) а также в том, что векторная форма изложения признана основной для аналитической геометрии в пространстве, поэтому она приемлема, для аналитической фотограмметрии, включающей задачи геометрии трехмерного пространства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления, части I и II, М., 1950.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. АН СССР, М., 1951.
3. Лобанов А. Н. Фототриангуляция с применением ЭВМ. М., 1960.
4. Лобанов А. Н. Фототриангуляция с применением ЭВМ. М., 1967.
5. Трунин Ю. М. Некоторые вопросы теории фотограмметрии. Известия вузов СССР, № 5, 1959.
6. Урмаев Н. А. Элементы фотограмметрии. М., 1941.

Работа поступила  
6 декабря 1967 г.