МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 8

ДИСКУССИИ И РЕЦЕНЗИИ

УДК 528.2

М. И. МАРЫЧ

О РОЛИ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

В работе [1] рассмотрен вопрос определения фигуры внешней уровенной поверхности планеты с любой степенью точности. С помощью поверхности отсчета, построенной так, чтобы расстояние между ней и определяемой поверхностью было третьего порядка малости, получена формула (20) для этого расстояния. Если в ней отбросим малые величины третьего порядка, то придем к формуле Н. К. Мигаля, определяющей фигуру Земли с учетом малых величин второго порядка [2, 4, 5]. Это свидетельствует о том, что написанную для потенциала силы тяжести на геоиде формулу Грина

$$2W_0 = \frac{1}{2\pi}\int g\frac{ds}{r} + \omega^2 F, \tag{1}$$

где g и W_0 — соответственно сила тяжести и ее потенциал; r — расстояние между данной и текущей точками на геоиде s;

$$\omega^2 F = \frac{1}{2\pi}\int\left[\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right]ds + U,$$

U — центробежный потенциал; n — внешняя нормаль к поверхности s, можно путем соответствующих преобразований привести к интегральному уравнению, решением которого является названная формула Мигаля. Выполним эти преобразования. Прежде всего отметим, что соотношение

$$\rho = \rho^1 - h$$

между радиусом-вектором ρ поверхности s, радиусом-вектором ρ' эллипсоида s' и расстоянием h между поверхностями s и s' позволяет установить зависимости между величинами $\frac{1}{r}$, ds, $\omega^2 F$ и соответствующими величинами $\frac{1}{r'}$, ds', $\omega^2 F'$, вычисленными на известной поверхности s'. Они приведены в [1] и с учетом малых величин второго порядка имеют вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{2a^2}(h_0 + h)\frac{1}{r_1}.$$

$$ds = \left(1 + \frac{2h}{a}\right)ds', \tag{2}$$

$$\omega^2 F = \omega^2 F',$$

где a — большая полуось эллипсоида s'; h_0 — значение h в данной точке; $r_1 = 2\sin\frac{\psi}{2}$; ψ — угол, образованный радиусами-векторами данной и текущей точек. С такой же степенью точности получим

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds'}{r'} + \frac{1}{2}(h_0 - 3h)\frac{d\sigma}{r_1}, \tag{3}$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности сферы единичного радиуса. Теперь с учетом (3) и (2) формула (1) запишется так:

$$2W_0 = \frac{1}{2\pi}\int g\frac{ds'}{r'} + \frac{1}{4\pi}\int g\,(h_0 - 3h)\frac{d\sigma}{r_1} + \omega^2 F'.$$

Поскольку силу тяжести можно представить в виде

$$g = g_e + \delta g,$$

где g_e — экваториальная постоянная, а δg — малая величина первого порядка и

$$\int\frac{d\sigma}{r_1} = 4\pi,$$

то тогда легко получить интегральное уравнение [1, 2]

$$-h = l - \frac{3}{4\pi}\int h\frac{d\sigma}{r_1}. \tag{4}$$

Здесь

$$l = \frac{2W_0}{g_e} + \frac{1}{2\pi g_e}\int g\frac{ds'}{r'} + \frac{\omega^2 F}{g_e}.$$

Данный прием составления интегрального уравнения (4) отличается от ранее использованного метода [1, 2] тем, что при нем уже не возникает вопрос о разложении в ряд Тейлора по степеням h силы тяжести и ее потенциала, а следовательно, и вопрос об использовании аномальной части вертикального градиента силы тяжести. К такому же выводу можно прийти и другим путем. Так, например, в классической теории фигуры Земли, где используется нормальное поле, роль интегрального уравнения (4), как известно, играет граничное условие

$$\frac{dT}{dh} + \frac{2T}{a} = -\Delta g, \tag{5}$$

(где Δg — аномалия силы тяжести), составленное для возмущающего потенциала T, или эквивалентное данному условию интегральное уравнение для плотности простого слоя. При переносе этого условия из определяемой поверхности на заданную поверхность отсчета тоже возникает вопрос об использовании рядов Тейлора и вертикального градиента аномалии силы тяжести. Однако, если в формуле М. С. Молоденского для возмущающего потенциала [6] вместо высот рельефа Земли взять высоты h, то величинами G можно пренебречь, и тогда придем к формуле Стокса

$$T_0 = \frac{a}{4\pi}\int \Delta g\, s(\psi)\, d\sigma, \tag{6}$$

где $s(\psi)$ — функция Стокса,

$$s(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\psi). \tag{7}$$

Смысл упомянутого переноса граничного условия (5) хорошо выясняется, если принять во внимание, что сумму двух первых приближений Молоденского для возмущающего потенциала, как показано в [3], можно записать так:

$$T_0 + T_1 = \frac{a}{4\pi} \int \left(\Delta g - h \frac{d\Delta g}{dh} \right) s(\psi)\, d\sigma + \frac{dT}{dh} h_0 . \tag{8}$$

Здесь

$$\frac{d\Delta g}{dh} = \frac{1}{2\pi a} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r_1^3} d\sigma = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} n \Delta g_n \tag{9}$$

есть вертикальный градиент аномалии силы тяжести. Действительно, поправка $-h\frac{d\Delta g}{dh}$ в аномалию силы тяжести за перенос граничного условия (5) в формуле фигурирует, но в то же время появилась и поправка $\frac{dT}{dh} h_0$, указывающая на обратный перенос возмущающего потенциала. Найдем результат, к которому приводит первая поправка. Принимая во внимание (7) и (9), а также то, что $h = h_0 + \Delta h$, находим:

$$\frac{a}{4\pi} \int h \frac{d\Delta g}{dh} s(\psi)\, d\sigma = -\Delta g h_0 - \frac{h_0}{a} T_0 + \frac{a}{4\pi} \int \Delta h \frac{d\Delta g}{dh} s(\psi)\, d\sigma ,$$

или, учитывая (5) и пренебрегая двумя последними членами, как малыми и медленно меняющимися при переходе от точки к точке на поверхности s величинами, имеем

$$\frac{a}{4\pi} \int h \frac{d\Delta g}{dh} s(\psi)\, d\sigma - \frac{dT}{dh} h_0 = 0 .$$

Таким образом, поправка в возмущающий потенциал компенсирует результат, к которому приводит поправка в аномалию силы тяжести.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марыч М. И. Определение фигуры Земли с учетом малых величин третьего порядка. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 3, 1963.
2. Марыч М. И. Новый вывод формулы Н. К. Мигаля, определяющей фигуру Земли. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 4, 1961.
3. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 3. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.
4. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, № 1, 1949
5. Мигаль Н. К. К вопросу определения фигуры Земли без использования нормального гравитационного поля. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, № 5, 1959.
6. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131. Геодезиздат, М., 1960.

Работа поступила
24 ноября 1967 г.