*А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ*

# О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ КОНФОРМНЫХ ПРОЕКЦИЙ С ЭЛЛИПСОВИДНЫМИ ИЗОКОЛАМИ

Применение картографических проекций с эллипсовидными изоколами для областей, имеющих вытянутую форму, дает возможность получить лучшее распределение искажений по сравнению с проекциями азимутальными, цилиндрическими или коническими.

Конформные проекции с эллипсовидными изоколами легко строятся в виде производных из двух конформных проекций: азимутальной и цилиндрической, путем простого линейного сочетания формул этих исходных проекций [1]. Общие формулы такой производной проекции имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x &= \kappa_1 x' + \kappa_2 x'', \\
y &= \kappa_1 y' + \kappa_2 y'', \\
m &= \kappa_1 m' + \kappa_2 m'',
\end{aligned}
\tag{1}
$$

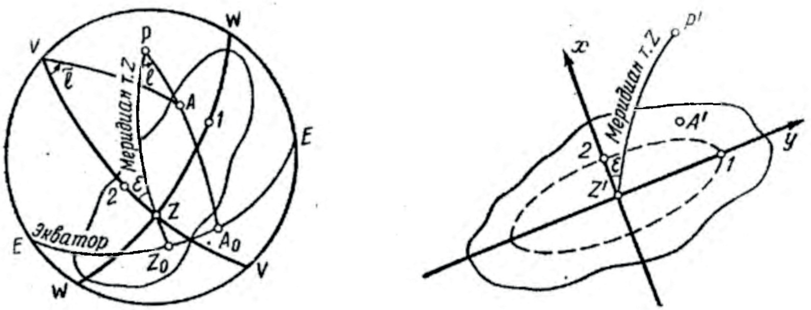
где $x$, $y$ — плоские прямоугольные координаты точки в проекции с эллипсовидными изоколами;
$m$ — масштаб длин в данной точке этой проекции.

Аналогичные величины для азимутальной проекции обозначены теми же буквами с одним штрихом, а для цилиндрической проекции — с двумя штрихами. Величны $\kappa_1$ и $\kappa_2$ являются положительными произвольными постоянными, выбираемыми таким образом, чтобы форма изокол по возможности лучше соответствовала очертаниям области и одновременно было достигнуто наилучшее распределение искажений.

Из формул (1) видно, что основной труд по вычислению такой проекции будет состоять в предварительном вычислении координат узловых точек картографической сетки и масштабов в исходных проекциях, а также расчете постоянных $\kappa_1$ и $\kappa_2$.

Заметим еще, что формулы (1) основаны на предположении, что координаты $x'$, $y'$ проекции азимутальной и координаты $x''$, $y''$ проекции цилиндрической отнесены к одной и той же системе плоских прямоугольных координат. Начало этой системы условимся в дальнейшем располагать в некоторой центральной точке $Z$ изображаемой области, которой на плоскости соответствует точка $Z'$ (см. рис.).

Широта $\varphi_0$ и долгота $\lambda_0$ от Гринвича точки $Z$ определяются по карте или глобусу с округлением до целых градусов. На той же карте (глобусе) проведем некоторую осевую линию $WW$ области, проходящую через точку $Z$, совпадающую с направлением общей вытянутости области и принимаемую за




дугу большого круга на земном шаре. Изображение этой линии на плоскости примем за ось ординат. Изображение дуги $VV$ большого круга, перпендикулярного осевой линии $WW$, примем за ось абсцисс. Ориентировка плоской прямоугольной системы координат определяется углом $\varepsilon$ между линией $VV$ и северным направлением меридиана в точке $Z$. Этот угол находят с помощью транспортира по карте или глобусу с округлением до целых градусов. Направление положительных полуосей координат примем в соответствии с левой системой.

Пусть требуется получить в конечном счете косую конформную проекцию эллипсоида. Тогда, очевидно, и исходные проекции должны быть рассчитаны как косые для эллипсоида. Этого можно достигнуть двумя путями.

Первый путь состоит в применении так называемых двойных проекций или проекций двойного отображения. В этом случае поверхность земного эллипсоида первоначально отображают конформно на шаре, а затем последний (также конформно) отображают на плоскости. В рассматриваемой нами задаче второе отображение следует осуществить дважды: один раз по закону косой азимутальной (стереографической) проекции и второй раз — по закону косой цилиндрической (меркаторской) проекции. При вычислении последней большой круг $WW$ играет роль «экватора» косой системы сферических координат. Заключительным этапом будет вычисление искомой производной из них проекции с эллипсовидными изоколами.

Второй путь состоит в непосредственном вычислении двух исходных косых проекций эллипсоида на плоскости, т. е. минуя предварительное конформное отображение эллипсоида на шаре. Необходимые для этого формулы косой азимутальной и косой цилиндрической конформных проекций эллипсоида можно получить различными способами. Довольно изящным способом этот вопрос был решен Г. А. Мещеряковым [2, 3]. К сожалению, полученные им формулы во многих случаях непосредственно не пригодны для рассматриваемой нами задачи, так как они не рассчитаны на удовлетворение указанного выше требования общности системы плоских координат для обеих исходных проекций. В наших целях формулы Г. А. Мещерякова можно с успехом использовать в случае, когда угол $\varepsilon=0$.

Учитывая указанное обстоятельство, нами были получены другие формулы косых конформных проекций эллипсоида, в которых географические координаты $\varphi_0$, $\lambda_0$ центральной точки области и угол $\varepsilon$ выступают в роли параметров. Тем самым рекомендуемые нами формулы рассчитаны на получение плоских координат точек в одной и той же общей для обеих проекций системе, началом которой является произвольно выбираемая некоторая центральная точка изображаемой области, а координатные оси расположены указанным вначале образом. При выводе формул мы пользовались по существу первым путем, т. е. методом двойного отображения. Однако отображение эллипсоида на шаре (по Мольвейде) и переход к косой системе сферических координат были осуществлены в самых аналитических выкладках.

Рекомендуемые нами формулы имеют следующий вид: для косой стереографической проекции эллипсоида

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{2R(\sigma\cos\varepsilon-\sigma_0\cos\varepsilon\cos l-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l)}{P+2\cos l},\\
y &= \frac{2R(\sigma\sin\varepsilon-\sigma_0\sin\varepsilon\cos l+\varkappa_0\cos\varepsilon\sin l)}{P+2\cos l},\\
m &= \frac{2R\varkappa_0}{r(P+2\cos l)}
\end{aligned}\right| \qquad (2)$$

и для косой цилиндрической проекции эллипсоида

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{R}{2\,\mathrm{mod}}\lg\frac{\varkappa_0\varkappa+2(\sigma\cos\varepsilon-\sigma_0\cos\varepsilon\cos l-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l)}{\varkappa_0\varkappa-2(\sigma\,\mathrm{sos}\,\varepsilon-\sigma_0\cos\varepsilon\cos l-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l)},\\
y &= R\,\mathrm{arctg}\,\frac{2(\sigma\sin\varepsilon-\sigma_0\sin\varepsilon\cos l+\varkappa_0\cos\varepsilon\sin l)}{\sigma_0\sigma+4\cos l},\\
m &= \frac{2R\varkappa_0}{r\sqrt{\varkappa_0^2\varkappa^2-4(\sigma\cos\varepsilon-\sigma_0\cos\varepsilon\cos l-\varkappa_0\sin\varepsilon\sin l)^2}}.
\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Здесь $R$ — радиус шара, числовое значение которого при самостоятельном применении формул (2), (3) может быть найдено из условия равенства масштаба в заданной точке области желаемой величине; $r$ — радиус параллели эллипсоида; mod — модуль десятичных логарифмов. Кроме того, здесь использованы введенные Г. А. Мещеряковым такие обозначения:

$$P = U_0 U + \frac{1}{U_0 U}, \quad \sigma = \frac{U^2 - 1}{U}, \quad \varkappa = \frac{U^2 + 1}{U}, \tag{4}$$

а также часто используемые в теории картографических проекций обозначения

$$U = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}, \quad l = \lambda - \lambda_0, \tag{5}$$

где $e$ — эксцентриситет земного эллипсоида;
$\varphi$ и $\lambda$ — широта и долгота точки на эллипсоиде.

Величины $U$, $\frac{1}{U}$, $\sigma$ и $\varkappa$ с семью десятичными знаками приводятся для целых градусов широты в таблице, прилагаемой к статье Г. А. Мещерякова [3], что существенно упрощает вычисления по формулам (2) и (3). Нулевой индекс при величинах $U$, $\sigma$ и $\varkappa$ указывает на то, что они должны быть выписаны из таблиц по аргументу $\varphi_0$.

Для простоты записи формул (2) и (3) в рабочем виде и удобства построения вычислительных схем введем еще такие обозначения:

$$A = \sigma_0 \cos\varepsilon, \quad B = \varkappa_0 \sin\varepsilon, \quad \bar{A} = \sigma_0 \sin\varepsilon, \quad \bar{B} = \varkappa_0 \cos\varepsilon; \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \sigma\cos\varepsilon, \quad S_2 = A\cos l, \quad S_3 = B\sin l, \\ T_1 &= \sigma\sin\varepsilon, \quad T_2 = \bar{A}\cos l, \quad T_3 = \bar{B}\sin l; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$S = S_1 - S_2 - S_3, \quad T = T_1 - T_2 + T_3. \tag{8}$$

$$\bar{S} = \frac{2S}{\varkappa_0\varkappa}, \quad \tilde{U} = \frac{1 + \bar{S}}{1 - \bar{S}};$$

$$Z = \sigma_0\sigma + 4\cos l, \quad \operatorname{tg}\tilde{l} = \frac{2T}{Z}; \tag{9}$$

$$V = r(P + 2\cos l), \quad W = \sqrt{(1 + \bar{S})(1 - \bar{S})} \tag{10}$$

$$M' = \frac{2\varkappa_0}{V}, \quad M'' = \frac{2}{r\varkappa W}. \tag{11}$$

Теперь формулы (2) и (3) запишутся так:
косая стереографическая проекция эллипсоида

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{2RS}{P+2\cos l}, \\
y &= \frac{2RT}{P+2\cos l}, \\
m &= RM',
\end{aligned}
\right| \qquad (12)
$$

косая цилиндрическая проекция эллипсоида

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{}{2\,\mathrm{mod}} \lg \tilde{U}, \\
y &= R\tilde{l}, \\
m &= RM''.
\end{aligned}
\right| \qquad (13)
$$

Нам остается осветить вопрос вычисления произвольных постоянных $\kappa_1$ и $\kappa_2$ формул (1).

Из сопоставления формул (12) и (13), с одной стороны, и формул (1) — с другой, мы замечаем, что при окончательном вычислении координат узловых точек сетки и масштабов проекции с эллипсовидными изоколами нам нужны будут не сами величины $\kappa_1$ и $\kappa_2$, а произведения каждой из них на радиус шара $R$

$$
c' = R\kappa_1, \quad c'' = R\kappa_2. \qquad (14)
$$

Поэтому вместо определения величин $\kappa_1$ и $\kappa_2$, которые нам собственно не нужны так же, как и величина $R$, будем определять величины $c'$ и $c''$. Для этого потребуем, чтобы изокола масштаба длин, равного единице, проходила через две заданные точки области: точку *1* с координатами $\varphi_1$, $\lambda_1$ и точку *2* с координатами $\varphi_2$, $\lambda_2$. Тогда, согласно формулам масштабов из (1), (12) и (13), должны удовлетворяться такие два равенства:

$$
\begin{aligned}
c'M_1' + c''M_1'' &= 1, \\
c'M_2' + c''M_2'' &= 1,
\end{aligned} \qquad (15)
$$

где индексы 1 и 2 при величинах $M'$ и $M''$ обозначают, что значение последних берется соответственно для точек *1* и *2*.

Рассматривая равенства (15) как систему линейных уравнений с двумя неизвестными относителньо $c'$ и $c''$, найдем

$$
c' = \frac{M_2'' - M_1''}{\Delta}, \quad c'' = \frac{M_1' - M_2'}{\Delta}, \qquad (16)
$$

где

$$
\Delta = M_1' M_2'' - M_2' M_1''. \qquad (17)
$$

Окончательно рабочий вид формул (1) будет таким:

$$x = c' x' + c'' x'',$$
$$y = c' y' + c'' y'', \tag{18}$$
$$m = c' M' + c'' M'',$$

где, как нетрудно видеть,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2S}{P+2\cos l} \\ y' &= \frac{2T}{P+2\cos l} \end{aligned}\right| \tag{19}$$

и

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\lg \tilde{U}}{2\mathrm{mod}}, \\ y'' &= \tilde{l}. \end{aligned} \tag{20}$$

Относительно выбора точек *1* и *2* следует сказать, что лучше всего одну из них взять на дуге $WW$ большого круга в удалении от центральной точки $Z$ примерно на 0,7 всего расстояния от последней до края области, другую — в том же удалении, но на дуге $VV$. При указанном размещении точек *1* и *2* достигается наиболее равномерное распределение искажений в пределах области, т. е. отклонение масштаба на краю области от единицы будет примерно равно отклонению его от единицы в центре области и лишь обратно по знаку.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. С. Лисичанский. Производные равноугольные проекции. Научные записки Львовского политехнического института, вып. 85, серия геодезическая № 9, Львов, 1692.
2. Г. А. Мещеряков. Построение теории конформных проекций. Труды Новосибирского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, том XII, 1959.
3. Г. А. Мещеряков. Новый способ вычисления косых конформных проекций. «Известия высших учебных заведений», раздел «Геодезия и аэрофотосъемка», выпуск 4, М., 1960.



Львовский политехнический институт



Работа поступила 21 мая 1964 г.