УДК 528.063

И. А. ЛОШКАРЕВ, А. А. ПЕРЕПЕЧКИН

ПРИМЕНЕНИЕ χ^2-КРИТЕРИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ НЕВЯЗОК И СМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК

Результаты геодезических измерений можно в большинстве случаев интерпретировать как нормально распределенные многомерные векторы, преобразуемые линейными (или линеаризованными) операторами в выходные многомерные векторы так, что распределение последних остается нормальным, а ковариационная матрица этих выходных векторов вычисляется по формуле

$$K_{xx} = A \cdot K_{ll} \cdot A^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

где A — матрица производных выходных величин x по измеренным значениям l; K_{ll} — ковариационная матрица измеренных значений.

В случае параметрического метода оценивания используют аналогичную формулу

$$K_{xx} = (B^{\mathrm{T}} \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B)^{-1}, \tag{2}$$

где B — матрица производных измеренных (входных) значений l по выходным величинам x.

С точки зрения контроля измерений и оценок устойчивости во времени и пространстве важен случай, когда математические ожидания равны нулю

$$M[x] = 0. \tag{3}$$

Невыполнение (3) можно использовать в качестве признака наличия грубых или систематических ошибок в измерениях или как признак неустойчивости положения точек.

При оценивании по (1) и (2) часто неизвестна нормировка матрицы K_{ll}, а дисперсия единицы веса подлежит определению (оценке)

$$K_{ll}=\mu^2\cdot Q_{ll}, \tag{4}$$

где Q_{ll} — корреляционная матрица измеренных величин.

Соответственно (1) и (2) имеют вид:

$$K_{xx}=\mu^2\cdot(A\cdot Q_{ll}\cdot A^{\mathrm{T}});$$
$$K_{xx}=\mu^2\cdot(B^{\mathrm{T}}\cdot Q_{ll}^{-1}\cdot B)^{-1}. \tag{5}$$

В этом случае важно число степеней свободы для определения μ^2

$$r=n-k, \tag{6}$$

где n — размер вектора l; k — размер вектора x.

Интервальное оценивание в (1) и (2) наиболее просто и состоит в назначении доверительной вероятности P_α с принятым уровнем значимости $\alpha=(1-P_\alpha)$. Расчет уровня значимости α выполняется на основе неравенства

$$F_1(\alpha)\leqslant F_2(P_\alpha), \tag{7}$$

где $F_1(\alpha)$ — потери при браковке годных измерений; $F_2(P_\alpha)$ — потери при принятии непригодных измерений в качестве пригодных. В процессе геодезических измерений вероятность α регламентирована нормативными допусками 10 или 0,6% (2σ или 3σ).

Если стандарт распределения случайной величины известен, длина доверительного интервала определяется лишь доверительной вероятностью P_α, в противном случае каждому числу степеней свободы соответствует конкретное распределение (Стьюдента), так что доверительный интервал является функцией 2^x параметров.

Однако, если имеем многомерный случайный вектор, то для обобщенной оценки размера доверительного интервала такой способ не совсем удобен, даже при известной его ковариационной матрице. Известно, однако, что нулевая гипотеза для m числа случайных величин может быть проверена с помощью χ^2-распределения [1]. Критерий строится в этом случае относительно суммы квадратов нормированных стандартом значений наблюдаемых величин

$$M[x]\neq 0;\quad P_\alpha,\ \text{если}\ \sum_{1}^{m}\frac{x_i^2}{\sigma_x^2}>\chi^2_{\alpha,m}. \tag{8}$$

При этом необходимо выполнение условия некоррелированности наблюдаемых величин x_i. Таким образом, для применения методики (8) необходимо преобразовать вектор x в равновесный ему, но с диагональной ковариационной матрицей. Такое ортогональное преобразование легко выполнимо для матрицы K_{xx}

$$\lambda=T^{\mathrm{T}}\cdot K_{xx}\cdot T, \tag{9}$$

где λ — диагональная матрица собственных значений матрицы K_{xx}; T — матрица нормированных собственных векторов (направляющих косинусов), удовлетворяющая условию

$$T \cdot T^{т} = E. \tag{10}$$

Сообразно с этим, наблюдаемый вектор x изобразится в новой системе координат в виде

$$u = T^{т} \cdot x. \tag{11}$$

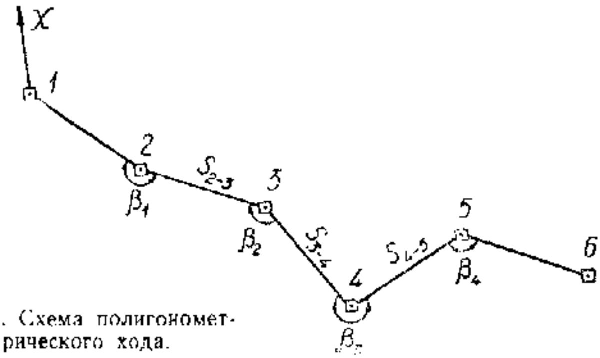

Рис. 1. Схема полигонометрического хода.

Нормировка вектора u осуществляется умножением его на матрицу обратную λ

$$u_0 = u^{\mathrm{T}} (\lambda^{-1})^{1/2}, \tag{12}$$

или, учитывая (9), имеем

$$u_0 = x^{т} \cdot T \cdot [(T^{т} \cdot K_{xx} \cdot T)^{-1}]^{1/2}. \tag{13}$$

Остается лишь получить сумму квадратов нормированного вектора u_0

$$\chi^2_{u_0} = x^{т} \cdot T \cdot (T^{т} \cdot K_{xx} \cdot T)^{-1} \cdot T^{т} \cdot x. \tag{14}$$

Учитывая (10), формулу (14) можно упростить

$$\chi^2_u = x^{т} \cdot K^{-1}_{xx} \cdot x. \tag{15}$$

Поскольку K^{-1}_{xx} весовая матрица вектора x, из (15) следует, что взвешенная сумма квадратов компонентов многомерного вектора x есть не что иное, как его нормированная длина.

Таким образом, в случае нормально распределенного вектора критическая область для него будет:

$$M[x] = 0;\ P_{\alpha},\ \text{если}\ x^{т} K^{-1}_{xx} \cdot x \leqslant \chi^2_{\alpha, m} \tag{16}$$

при уровне значимости α и числе компонент вектора x равном m.

Построим критическую область для невязки полигонометрического хода (рис. 1). Ковариационная матрица исходных координат измеренных углов и расстояний приведена в табл. 1. Невязки w_x и w_y вычисляем по предварительно исправленным углам, поэтому

Таблица 1

Матрица производных невязок полигонометрического хода

x \ iT	x_1	y_1	x_2	y_2	x_5	y_5	x_6	y_6	β_1	β_2	β_3	β_4	S_{2-3}	S_{3-4}	S_{4-5}
w_x	2,37	−2,37	−1,37	−2,37	−1,99	+0,56	+1,99	−0,56	+1,12	+0,25	−0,25	−1,12	0,50	−0,87	+0,50
w_y	+0,74	−0,74	−0,74	+1,74	−0,16	−0,91	+0,16	−0,09	+0,18	+0,18	−0,68	−0,18	+0,87	+0,50	+0,87

Таблица 2

Ковариационная матрица исходных данных полигонометрического хода

l \ iT	x_1	y_1	x_2	y_2	x_5	y_5	x_6	y_6	β_1	β_2	β_3	β_4	S_{2-3}	S_{3-4}	S_{4-5}
x_1	3,90	0,62	0,31	0,75	1,07	−0,50	0,30	−2,88	0	0	0	0	0	0	0
y_1	0,62	4,04	1,29	3,55	−1,10	1,19	−1,27	1,82	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0,31	−1,29	4,46	−1,25	2,99	1,34	4,45	2,88	0	0	0	0	0	0	0
y_2	0,75	3,55	−1,25	4,07	−1,13	1,23	−1,27	1,88	0	0	0	0	0	0	0
x_5	1,07	−1,10	2,99	−1,13	4,76	1,08	2,99	0,81	0	0	0	0	0	0	0
y_5	−0,50	1,19	1,34	1,23	1,08	4,56	1,33	3,05	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0,30	−1,27	4,45	−1,27	2,99	1,33	5,92	3,40	0	0	0	0	0	0	0
y_6	−2,88	1,82	2,88	1,88	0,81	3,05	3,40	9,31	0	0	0	0	0	0	0
β_1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
β_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
β_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
β_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
S_{2-3}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
S_{3-4}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
S_{4-5}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

для определения значений производных невязок по исходным величинам, необходимо выписать невязки w_x и w_y как функции пятнадцати величин — восьми координат (точки *1*, *2*, *5* и *6*), четырех углов и трех расстояний. Значения производных удобно рассчитывать на ЭЦВМ, задаваясь малыми приращениями исходных величин (табл. 2). По (1) вычисляем ковариационную матрицу невязок w_x, w_y

$$K_{w_x w_y} = \begin{vmatrix} 52{,}44 & 18{,}38 \\ 18{,}38 & 21{,}70 \end{vmatrix}.$$

Весовая матрица невязок будет

$$P^{-1}_{w_x w_y} = \begin{vmatrix} 0{,}0271 & -0{,}0230 \\ -0{,}0230 & 0{,}0655 \end{vmatrix}.$$

Например, $w_x = +9{,}90$; $w_y = -5{,}50$.

Определим допустимость невязки с $\alpha = 0{,}05$. Так как $P_\alpha = 0{,}95$, а $m = 2$ по таблице χ^2 — распределения критическое значение $\chi^2_{05;\,2} = 5{,}991$, а наблюденное значение суммы квадратов

$$\chi^2 = (9{,}90;\ -5{,}50)\cdot\begin{pmatrix} 0{,}0271 & -0{,}0230 \\ -0{,}0230 & 0{,}0655 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9{,}90 \\ -5{,}50 \end{pmatrix} = 7{,}082.$$

Таким образом, гипотезу о нулевом значении математического ожидания невязки необходимо отбросить с вероятностью 95%. Если же не учитывать корреляции невязок w_x и w_y, то стандартная невязка $\sigma_{абс}$ будет

$$\sigma_{абс} = \sqrt{52{,}44 + 21{,}70} \sim 8{,}61,$$

а наблюденная абсолютная невязка

$$f_а = \sqrt{9{,}90^2 + 5{,}50^2} = 11{,}32.$$

Нормированное значение невязки

$$f_а^н = \frac{f_а}{\sigma_{абс}} = \frac{11{,}32}{8{,}61} = 1{,}315,$$

что намного менее критического, равного 1,96 при $P_\alpha = 0{,}95$, и невязку следовало бы считать допустимой. Если предположим, что невязки составляют

$$w_x = +9{,}9; \quad w_y = +5{,}5,$$

то наблюденное значение χ^2-критерия по (15) составит 2,139, т. е. невязка допустима. Приведенный пример убедительно свидетельствует о слабости общепринятого критерия по абсолютной невязке, не учитывающего направления этого вектора и его корреляционную матрицу.

Традиционное решение будет справедливо лишь для вытянутого хода, направленного вдоль одной из координатных осей при безошибочных исходных координатах. В этом случае ковариационная матрица невязок будет диагональна и (15) дает квадрат нормированной абсолютной невязки.

Рассмотрим пример построения критической области для смещений группы трех реперов. Схема нивелирной сети показана на рис. 2. Отметки реперов *1—8* получены из предыдущих циклов измерений. Ковариационная матрица отметок реперов 1—8 приведена в табл. 3. Реперы 3—5 могли иметь осадку, поэтому они

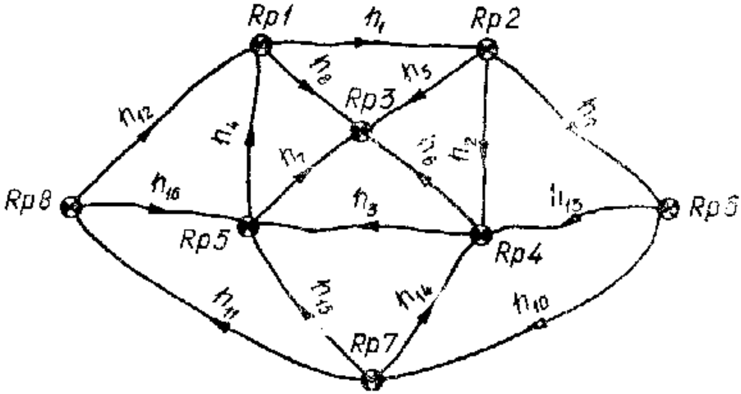

Рис. 2. Схема нивелирной сети.

обозначены в этом цикле 3′, 4′ и 5′. Задача состоит в получении уточненных отметок реперов 1—8 с учетом наблюдений последнего цикла и в определении смещений реперов 3—5. Ковариационная матрица измеренных превышений дана в табл. 3. Матрица коэффициентов параметрических уравнений (B) приведена в табл. 4. Ковариационная матрица отметок реперов 1—8 и реперов 3′—5′ дана в табл. 5. Как видим, отметки реперов 1—8 уточнены, хотя наблюдения на реперы 3—5 в этом цикле не выполнялись. В качестве приближенных значений отметок реперов 1—8 приняты отметки их из предыдущих измерений, а приближенные отметки реперов 3′—5′ равны отметкам реперов 3—5. Поэтому в столбце разностей наблюденных превышений и их приближенных значений, приведенных в последнем столбце табл. 4, имеются нулевые элементы. Вычисленные по обычным правилам поправки в отметки 11 реперов приведены в последней строке табл. 3. Теперь нас интересуют разности отметок реперов 3—5 и реперов 3′—5′ (в нашем случае это разности соответствующих поправок). Для этого составляем матрицу I из нулей и ± 1 [2]:

$$I' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 3

Ковариационная матрица исходных данных сети реперов

I \ I^T	Rp1	Rp2	Rp3	Rp4	Rp5	Rp6	Rp7	Rp8	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	h_{15}	h_{16}
Rp1	0,35	0,13	0,12	0,08	0,13	0,05	0,06	0,10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp2	0,13	0,35	0,11	0,13	0,08	0,09	0,06	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp3	0,12	0,11	0,41	0,11	0,11	0,05	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp4	0,08	0,13	0,11	0,31	0,11	0,11	0,10	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp5	0,13	0,08	0,11	0,11	0,31	0,05	0,10	0,11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp6	0,05	0,09	0,05	0,11	0,05	0,50	0,10	0,02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp7	0,06	0,06	0,05	0,10	0,10	0,10	0,42	0,03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp8	0,10	0,05	0,05	0,05	0,11	0,02	0,03	0,50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
h_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
h_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
h_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
h_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
h_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
м$_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0
h_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
h_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

Таблица 4

Матрица коэффициентов параметрических уравнений

l \ x^{T}	Rp 1	Rp 2	Rp 3	Rp 4	Rp 5	Rp 6	Rp 7	Rp 8	Rp 3′	Rp 4′	Rp 5′	$(l-\tilde{l})$
Rp1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Rp5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Rp6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Rp7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Rp8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
h_{1-2}	−1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1
h_{2-4}	0	−1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	−2
h_{4-5}	0	0	0	−1	+1	0	0	0	0	0	0	+2
h_{5-1}	+1	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	0	+2
h_{2-3}	0	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	+3
h_{4-3}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−1	0	+4
h_{5-3}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−1	−4
h_{1-3}	−1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−3
h_{2-6}	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	+4
h_{6-7}	0	0	0	0	0	−1	+1	0	0	0	0	1
h_{7-8}	0	0	0	0	0	0	−1	+1	0	0	0	+2
h_{8-1}	+1	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	−3
h_{6-4}	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	+1	0	−2
h_{7-4}	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	+1	0	−1
h_{7-5}	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	+1	+1
h_{8-5}	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0	−1	+2

Таблица 5

Ковариационная матрица уравненных отметок реперов

$\hat{x}$ \ x^{T}	Rp1	Rp2	Rp3	Rp4	Rp5	Rp6	Rp7	Rp8	Rp3′	Rp4′	Rp5′
Rp1	0,268	0,143	0,105	0,087	0,116	0,080	0,087	0,113	0,180	0,139	0,171
Rp2	0,143	0,268	0,099	0,116	0,087	0,112	0,087	0.077	0,180	0,170	0,139
Rp3	0,105	0,099	0.405	0,109	0,108	0,060	0,060	0,059	0,092	0,082	0,084
Rp4	0,087	0,116	0,109	0.306	0,112	0,106	0,097	0,066	0,099	0,102	0,091
Rp5	0,116	0,087	0,108	0,112	0,306	0,065	0,098	0,106	0,099	0,092	0,103
Rp6	0,080	0,112	0,060	0,106	0,065	0,376	0,115	0,055	0,111	0,148	0,105
Rp7	0,087	0,087	0,060	0,097	0.098	0,115	0,308	0,084	0,113	0,141	0,137
Rp8	0,113	0,077	0,059	0,066	0,106	0,055	0,084	0,368	0,107	0,097	0,140
Rp3′	0,180	0.180	0,092	0,099	0,099	0,111	0,113	0,107	0,720	0,261	0,260
Rp4′	0,139	0,170	0,082	0,102	0,092	0,148	0,141	0,097	0,261	0,484	0,249
Rp5′	0,171	0,139	0,084	0,091	0,103	0,105	0,137	0,140	0,260	0,219	0,483
dH^{1}	0,49	−0,14	0,08	−0,03	0,03	0,37	−0,37	−0,26	−0,34	2,12	0,40

Умножая матрицу l^T на вектор поправок отметок ∂H, получим осадки реперов 3—5

$$\Delta \bar{H} = l^T \partial H = \begin{pmatrix} -0{,}42 \\ -2{,}09 \\ +0{,}37 \end{pmatrix},$$

а умножая ковариационную матрицу отметок реперов слева и справа на матрицу l, получаем ковариационную матрицу осадок реперов

$$K_{\Delta H} = l^T \cdot K_{HH} \cdot l = \begin{pmatrix} 0{,}940 & 0{,}188 & 0{,}186 \\ 0{,}188 & 0{,}587 & 0{;}179 \\ 0{,}186 & 0{,}179 & 0{,}583 \end{pmatrix}.$$

Соответственно весовая матрица осадок

$$P_{\Delta H} = \begin{pmatrix} 1{,}178 & -0{,}291 & -0{,}286 \\ -0{,}291 & 1{,}956 & -0{,}507 \\ -0{,}286 & -0{,}507 & 1{,}961 \end{pmatrix}.$$

И в соответствии с (15) наблюденное значение χ^2-критерия равно 9,328, а критическое значение $\chi^2_{05,3} = 8{,}000$, так что следует принять гипотезу об осадке реперов 3—5.

Таким образом, для построения критической области многомерного случайного нормального вектора необходимо вычислить его «длину». Квадрат нормированной длины случайного вектора получают умножением его весовой матрицы на сам вектор слева и справа. Критическая область для многомерного вектора строится χ^2-критерием при принятом уровне значимости и числе степеней свободы, равном числу компонент-вектора.

Список литературы: 1. *Абезгауз Г. К., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А.* Справочник по вероятностным расчетам. — М.: Воениздат, 1970. 2. *Лошкарев Н. А.* Оценка средних значений коррелированных величин методом максимального правдоподобия. — Инженерная геодезия, 1982, вып. 25.

Статья поступила в редколлегию 18.04.83