УДК 528.21/22

А. Н. МАРЧЕНКО

О ПОСТРОЕНИИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ АНОМАЛЬНОГО ПОЛЯ

В [1, 2] рассмотрена возможность устойчивой аппроксимации возмущающего потенциала T Земли набором потенциалов точечных масс (разложение T по фундаментальным решениям уравнения Лапласа) с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. В качестве стабилизатора решения выбран квадрат нормы потенциала T, представляемого суммой потенциалов точечных масс, получено его общее выражение на гильбертовом пространстве $H_2^q(G_B)$ с воспроизводящим ядром и найдены замкнутые соотношения для упомянутой нормы в случае известных в литературе воспроизводящих ядер.

Для построения упомянутого стабилизатора предпринята попытка определения численных значений шестипараметрического ядра (для $q=2{,}5$) по известной наблюдательной информации. При этом учитывалось то, что в соответствии с теоремой Рунге-Крарупа, доставляющей теоретическое обоснование современных методов решения задач физической геодезии, аппроксимируемая функция T определена на несимметричном множестве G точек (вне поверхности τ Земли), а аппроксимирующая функцию T последовательность потенциалов — на симметричном множестве G_B точек (вне сферы Бьерхаммара) трехмерного евклидова пространства R_3.

1. Будем рассматривать [3, 4] в G_B множество X_0 гармонических и регулярных на бесконечности функций. В практике физической геодезии используются [4, 10] гильбертовы пространства $H_2^q(G_B)$, которые представляют собой пересечение гармонических в G_B и регулярных на бесконечности функций с соболевским пространством $W_2^q(G_B)$. Под X_q будем понимать [4] множество гармонических в G_B и регулярных на бесконечности функций из X_0, для которых норма, соответствующая скалярному произведению пространства $H_2^q(G_B)$, конечна.

Так как каждой точке $Q\in G_B$ с координатами (x, y, z) соответствует антиподная точка $\tilde{Q}\in G_B$ с координатами $(-x, -y, -z)$, то область G_B естественно рассматривать как симметричное относительно начала координат * множество точек, за счет чего любая

* Полагаем, что начало системы координат, центр сферы Бьерхаммара и центр инерции планеты расположены в одной точке.

функция $U \in X_q$ может единственным образом быть представлена в виде суммы

$$U(Q) = U^+(Q) + U^-(Q) \tag{1}$$

четной U^+ и нечетной U^- функций, причем

$$U^+(Q) = \frac{1}{2}[U(Q) + U(\tilde{Q})];$$

$$U^-(Q) = \frac{1}{2}[U(Q) - U(\tilde{Q})]. \tag{2}$$

Таким образом, только из симметрии области G_B определения изучаемых гармонических функций уже следует принципиальная возможность выделения на X_q с помощью (2) подмножества X_q^+ четных и подмножества X_q^- нечетных гармонических функций. Дальнейшее изучение гармонических функций (четных и нечетных), которые таким естественным образом связаны с центральной симметрией области определения G_B функций из X_q, привели [3] к формулировке следующих достаточно очевидных утверждений:

1. Любые две гармонические вне сферы Бьерхаммара и регулярные на бесконечности функции U^+ и V^-, одна из которых четная $U^+ \in X_q^+$, а вторая $V^- \in X_q^-$ — нечетная, ортогональная в $H_2^q(G_B)$.

2. Гильбертово пространство $H_2^q(G_B)$ разлагается в ортогональную сумму подпространств H_q^+ и H_q^-

$$H_2^q = H_q^+ \oplus H_q^- \tag{3}$$

соответственно четных и нечетных функций из $H_2^q(G_B)$. При этом, если $K_q(P, Q)$ (P, Q — точки из G_B) — воспроизводящее ядро H_2^q, то

$$K^q(P,Q) = K_q^+(P,Q) + K_q^-(P,Q), \tag{4}$$

где K_q^+ и K_q^- — соответственно воспроизводящие ядра подпространств H_q^+ и H_q^-. В таком случае

$$K_q^+(P,Q) = \frac{1}{2}[K^q(P,Q) + K^q(P,\tilde{Q})];$$

$$K_q^-(P,Q) = \frac{1}{2}[K^q(P,Q) - K^q(P,\tilde{Q})], \tag{5}$$

где $\tilde{Q}$ — точка, антиподная точке Q.

Теперь введем в рассмотрение две сферы σ_1, σ_2 радиуса R_1 и R_2 (для определенности примем $R_1 < R_2$), центры которых совпадают с началом системы координат, а сами сферы находятся внутри поверхности Земли. Дальнейший интерес представляют множества $X_q(G_1)$ и $X_q(G_2)$ гармонических в G_1 и G_2 и регулярных на бесконечности функций, соответствующие гильбертовы пространства $H_2^q(G_1)$, $H_2^q(G_2)$ и следующие утверждения [3].

3. Множества $X_q^+(G_1)$ и $X_q^-(G_1)$ являются всюду плотными подмножествами соответственно множеств $X_q^+(G_2)$ и $X_q^-(G_2)$.

4. Множества $X_q^+(G_i)$ и $X_q^-(G_i)$ $(i=1, 2)$ являются всюду плотными (по метрике пространства $H_2(G_i)$ подмножествами соответственно множеств $X_{q-1}^+(G_i)$ и $X_{q-1}^-(G_i)$ $(i=1, 2)$.

Перечисленные утверждения позволяют заключить, что имеется принципиальная возможность построения воспроизводящего ядра $K^q(P, Q)$, характеризуемого в общем [3, 4] асимптотикой $\{k_n^q = c_q/n^{2q-2}\}_{n=0}^{\infty}$ ($c_q = \mathrm{const}$) в виде суммы воспроизводящих ядер $K_q^+(P, Q)^{R_1}$ и $K_q^-(P, Q)^{R_2}$, что в их разложении по шаровым функциям могут фигурировать не только различные значения R_1, R_2 радиуса сферы Бьерхаммара, но и различные модели асимптотик $\{k_{2l}^{\alpha}\}_{l=0}^{\infty}$ $(\alpha - q)$, $\{k_{2l+1}^{\beta}\}_{l=0}^{\infty}$ $(\beta=q)$, причем не обязательно, чтобы $\alpha=\beta$, Так, если $\alpha<\beta$, причем разность $(\beta-\alpha)$ представляет собой целое положительное число, то справедливо представление соответствующего воспроизводящего ядра $K^{\alpha}(P, Q)$ в форме

$$K^{\alpha}(P,Q) = K_{\alpha}^{+}(P,Q)^{R_1} + K_{\beta}^{-}(P,Q)^{R_2}. \tag{6}$$

II. Воспроизводящее ядро $K^q(P, Q)$ гильбертова пространства H_2^q можно интерпретировать ковариационной функцией возмущающего потенциала [4, 10]. При этом последовательность чисел $\{k_n^q\}$ должна наилучшим образом представлять спектр эмпирических степенных дисперсий d_n геопотенциала, а $K^q(P, Q) = K^q(\psi=0)$ согласовано с общим значением дисперсии D поля. Такое воспроизводящее ядро считают оптимальным [4, 6], так как выбор последнего обеспечивает минимум средней квадратической ошибки аппроксимации. Следует отметить также, что на практике, как правило, принято [5, 10] строить ковариационную функцию аномалий силы тяжести, что, впрочем, не имеет принципиального значения, так как знание модельной $C(\psi)$ позволяет аналитически получать ковариации других трансформант гравитационного поля.

Перейдем к определению модельной ковариационной функции $K^q(P, Q) = K^q(\psi)$ для изучения глобального гравитационного поля, под которым далее понимаем такую его аппроксимацию, которая с необходимой точностью описывает движение геодезических спутников (ИСЗ). Использование при аппроксимации геопотенциала по спутниковым наблюдениям модельных «точечных» ковариационных функций, построенных для целей физической геодезии [5, 8, 11], не является окончательным решением задачи. Так, последние характеризуются значением $C(\psi=0)=C_0 \approx \approx 1800 \cdot 10^{-10}$ м²/с⁴, что соответствует точечной дисперсии поля аномалий силы тяжести, т. е. дисперсии детального гравитационного поля Земли, и накладывает определенные условия на асимптотику убывания модельных степенных дисперсий c_n (или d_n). Учитывая большое удаление от поверхности планеты геодезических спутников, можно сказать, что в этом случае изучению подлежит более сглаженное поле, которому будет соответствовать меньшая дисперсия C_0 (на поверхности Земли) и, возможно, иной закон убывания степенных дисперсий. Построение ковариационной функции такого сглаженного поля можно, в принципе, свести к использованию оператора сглаживания (см. [4, 7, 11]) в известных глобальных ковариационных функциях «точечного» поля. Однако, поскольку на практике приходится иметь дело с различной по сглаженности информацией, желательно вместо одной «универсальной» получить модельные ковариационные функции именно с учетом их целевого назначения.

Последнее особенно полезно для практической реализации алгоритма устойчивой аппроксимации геопотенциала методом регуляризации с использованием системы неортогональных базисных функций, в частности системы потенциалов точечных масс [1, 2].

Такой подход обеспечит возможность получения замкнутых выражений, что затруднительно при наличии оператора сглаживания, для стабилизаторов решения, соответствующих различной по степени сглаженности информации о гравитационном поле Земли. В результате можно вместо обращения некоторой ковариационной матрицы, стабилизирующей решение, вычислять с помощью замкнутых выражений из [2], непосредственно обратную ковариационной, матрицу, минуя тем самым ряд теоретических трудностей, связанных со второй моделью среднеквадратической коллокации. Кроме того, построение ковариационной функции типа (6) позволит обеспечить стабилизацию четной и нечетной составляющих, аппроксимирующих в сумме геопотенциал.

Согласно приведенным выше исследованиям о возможности представления воспроизводящего ядра в форме (6), модельную $C_M(P, Q)$ ковариационную функцию аномалий Δg силы тяжести запишем в виде

$$C_M(P,Q) = C_1^+(P,Q) + C_2^-(P,Q). \qquad (7)$$

Отметим, что из анализа гравитационного поля по спутниковым и наземным данным было установлено несколько подходящих моделей [10, 11], аппроксимирующих «эмпирическую» асимптотику c_n степенных дисперсий Δg. Ниже мы воспользуемся моделью Черпнига—Раппа [11], что соответствует воспроизводящему ядру $K^q(P, Q)$, если $q=2{,}5$. При этом получим

$$C_1^+(P,Q) = A_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k-2)(2k+B_1)} \left(\frac{R_1^2}{\rho_P \rho_Q}\right)^{2k+2} P_{2k}(\cos\psi);$$

$$C_2^-(P,Q) = A_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k-1)(2k+1+B_2)} \left(\frac{R_2^2}{\rho_P \rho_Q}\right)^{2k+3} P_{2k+1}(\cos\psi), \tag{8}$$

где параметры (A_1, B_1, R_1), (A_2, B_2, R_2) подлежат определению (B_1, B_2 — целые числа).

Легко видеть с учетом (5), что последние соотношения можно записать и так:

$$C_1^+(P,Q) = C_1^+(s_1, t) = \frac{1}{2}[C_M(s_1, t) + C_M(s_1, -t)],\ s_1 = \left(\frac{R_1^2}{\rho_P \rho_Q}\right);$$

$$C_2^-(P,Q) = C_2^-(s_2, t) = \frac{1}{2}[C_M(s_2, t) - C_M(s_2 - t)],\ s_2 = \left(\frac{R_2^2}{\rho_P \rho_Q}\right), \tag{9}$$

где модельная $C_M(P, Q) = C_M(s, t)$ ковариационная функция определяется с помощью известного замкнутого выражения [11], вследствие чего и запись (9) мы можем считать результатом суммирования рядов (8).

Отметим на основании (9) для вычисления дисперсий четной $C^+(\psi=0)$ и нечетной $C^-(\psi=0)$ составляющих поля на сфере среднего радиуса $R_e(s = R_B^2/R_e^2)$ следующие соотношения:

$$C^+(\psi=0) = \frac{1}{2}[C_M(\varphi=0) + C_M(\psi=\pi)];$$

$$C^-(\psi=0) = \frac{1}{2}[C_M(\psi=0) - C_M(\psi=\pi)]. \tag{10}$$

Замкнутое выражение для $C^+(\psi=0)$ приведено в [5]. Учитывая (10), имеет смысл получить замкнутое соотношение и для ковариации $C_M(\psi=\pi)$. Отметим здесь лишь, что последнее можно представить (после выполнения всех преобразований) в следующей форме:

$$C_M(\psi=\pi) = -A\left[\frac{s^4 + (-1)^B(B+1)s^{2-B}}{B+2}\ln(1+s) + \right.$$
$$\left. + \frac{B+1}{B+2}\sum_{n=1-B}^{2}(-1)^n \frac{s^{n+2}}{n+B}\right], \tag{11}$$

причем в качестве параметров (A, B, s) могут фигурировать введенные ранее величины (A_i, B_i, s_i), $i=1, 2$.

Для вычисления «эмпирических значений» степенных дисперсий выбрано спутниковое решение GEM-9, дающее на практике надежные результаты. Отметим также, что для вычисления орбит ИСЗ успешно используются и такие модели геопотенциала, которые получены из комбинации спутниковых наблюдений, средних значений Δg и высот геоида. Наиболее согласованные результаты получены, как показывает практика (например, решения GEM-10, GEM-10B), при использовании аномалий силы тяжести, сглаженных по трапециям $5\times5°$, в частности значений Δg [9]. Поэтому ниже с учетом целевого назначения модельной функции использовалась не точечная дисперсия, а ее значение, соответствующее данным о сглаженных Δg по [9] трапеция $5\times5°$, равное

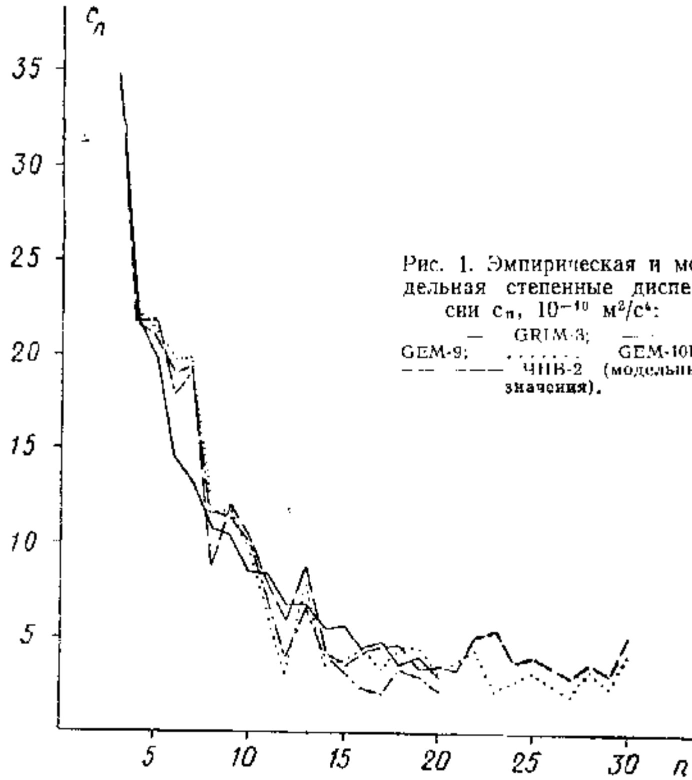

Рис. 1. Эмпирическая и модельная степенные дисперсии c_n, 10^{-10} м²/с⁴: — GRIM-3; — · GEM-9; .... GEM-10B; — — ——— ЧНВ-2 (модельные значения).

$\sim 232{,}5\cdot10^{-10}$ м²/с⁴ после исключения степенной дисперсии $c_2\approx$ $\approx 7{,}4\cdot10^{-10}$ м²/с⁴ второго порядка, принятого здесь в соответствии с [9]. На основании оценочного значения ковариации $C(\psi=\pi)\approx$ $\approx 37{,}4\cdot10^{-10}$ м²/с⁴ при выводе также использовались вычисленные по (10) дисперсии $C^{+}(\psi=0)\approx 97{,}55\cdot10^{-10}$ м²/с⁴ четной и $C^{-}(\psi=0\approx$ $\approx 134{,}95\cdot10^{-10}$ м²/с⁴ нечетной составляющих аномального поля. После просчета ряда вариантов было выбрано решение (названное нами ЧНВ-2), параметры которого приведены ниже:

A_1	A_2	B_1	B_2	s_1	s_2
$405{,}84\cdot10^{-10}$ м²/с⁴	$345{,}83\cdot10^{-10}$ м²/с⁴	15	13	0,93990	0,95365

Среднеквадратическое отклонение m_c модельных степенных дисперсий от таковых для решения GEM-9 составляет $2{,}48\times$

$\times 10^{10}$ м²/с⁴. Для сравнения отметим, что m_c для шестипараметрической модели $2L$ из [5] другого типа (предложенной в [8] для целей физической геодезии) составляет $2{,}81 \cdot 10^{-10}$ м²/с⁴, а для трехпараметрической модели [11] (при ее сравнении с решением GEM-9) — $6{,}28 \cdot 10^{-10}$ м²/с⁴. Полученное хорошее согласие модельных (по ЧНВ-2) и эмпирических степенных дисперсий иллюстрируется на рис. 1.

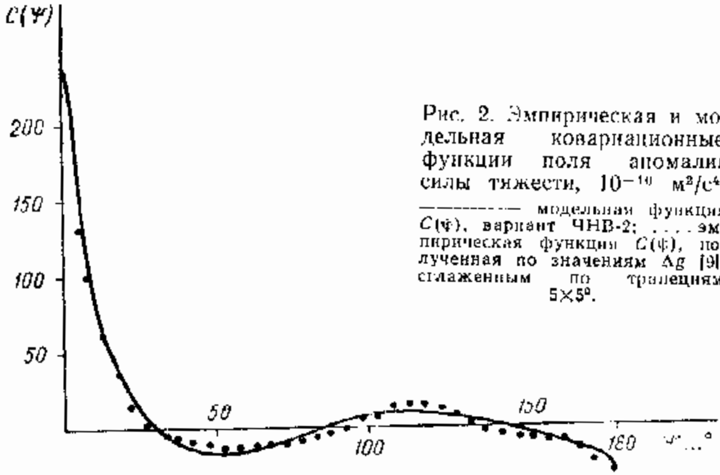

Рис. 2. Эмпирическая и модельная ковариационные функции поля аномалий силы тяжести, 10^{-10} м²/с⁴: ———— модельная функция $C(\psi)$, вариант ЧНВ-2; . . . . эмпирическая функция $C(\psi)$, полученная по значениям Δg [9], сглаженным по трапециям 5×5°.

Найденные из уравнивания параметры позволили с помощью соотношений (9) и незначительно видоизмененной подпрограммы COVA [11] получить модельную ковариационную функцию $C(\psi)$, представленную на рис. 2. На нем показаны эмпирические значения ковариаций Δg, рассчитанные на основании усредненных по трапециям 5×5° аномалий силы тяжести [9].

Кроме того, на рис. 3 представлены эмпирическая (по данным спутниковой альтиметрии GEOS-3) и модельная (по ЧНВ-2) ковариационные функции высот геоида. Их согласие представляется особенно существенным фактом, который хорошо иллюстрирует качества ядра ЧНВ-2: последнее получено без использования измерительных данных о высотах геоида.

На рис. 4 для сравнения представлены значения степенных дисперсий c_n, рассчитанных по «правилу Каулы», модели Чернинга Раппа, модели $2L$ Джексли и полученной в данной работе модели ЧНВ-2. Последняя характеризуется следующими особенностями:

наилучшим представлением в количественном отношении эмпирических степенных дисперсий c_n низких порядков;

наибольшей скоростью «затухания» значений c_n в зависимости от увеличения порядка n, что связано с целевым назначением ядра ЧНВ-2 именно для устойчивой аппроксимации глобального гравитационного поля Земли;

соответствующие значениям параметров s_1 и s_2 радиусы R_1 и R_2 оказались значительно меньше ($R_1=6176{,}6$ км, $R_2=6221{,}6$ км), чем значение радиуса сферы Бьерхаммара, определяемое по информации о точечных значениях Δg (например, по данным [11] $R_B=6369{,}8$ км).

Таким образом, использование представления воспроизводящего ядра в виде (7), (8) как следствие учета симметрии области определения гармонических вне сферы Бьерхаммара функций позволяет улучшить не только количественные, но и качественные модельные представления как степенных дисперсий геопотенциала, так и ковариаций $C(\psi)$, а значит, других трансформант гравитационного поля Земли. Например, график распределения c_n в соответствии с моделью GEM-10C, усеченной до 180-го порядка, представляет собой ломаную линию, причем степень «изломанности» наиболее велика при малых n и $n<60$ и значительно уменьшается при $n\to180$. Аналогичную картину (правда более сглаженную) мы наблюдаем (см. рис. 4) при рассмотрении графика значений c_n, полученных в соответствии с моделью ЧНВ-2.

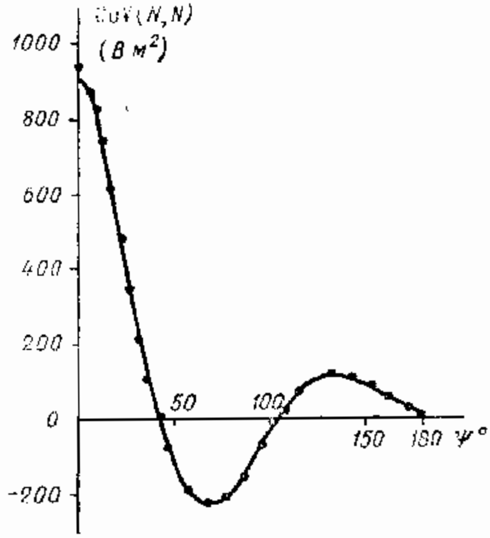

Рис. 3. Эмпирическая и модельная ковариационные функции cov(N, N) высот геоида, м²:

——— — модельная функция по ЧНВ-2; ······· эмпирическая функция, полученная по значениям высот геоида N из альтиметрических данных, усредненных по трапециям 5×5°.

Найденные здесь значения R_1 и R_2 имеют важное практическое приложение при построении глобальных точечных моделей геопотенциала. Согласно [2], точечные массы, сумма потенциалов которых аппроксимирует четную и нечетную составляющие гравитационного поля Земли, должны находиться внутри сфер указанных радиусов, что обеспечит постоянную требуемую гладкость решения.

Отметим также, что представленная в работе методика определения параметров воспроизводящего ядра в дальнейшем потребует возможных уточнений. При этом желательно такое изменение стандартной разграфки для «средних» значений аномалий силы тяжести, которое дало бы возможность разделения (в стоксовом приближении) значений Δg на четную и нечетную, относительно центра инерции, составляющие и позволило бы не только более точно, чем в данной работе, оценить значения ковариаций $C(\psi=\pi)$,

$C^+(\psi=0)$ и $C^-(\psi=0)$, но и получить эмпирические $C^+(\psi)$ и $C^-(\psi)$ для $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ с целью их применения для уточнения модели.

Наконец, приведем некоторые соотношения для вычисления степенных дисперсий аномалий силы тяжести, моделируемых совокупностью дискретных точечных масс. Если воспользоваться описанием возмущающего потенциала T и далее аномалий силы тяжести Δg некоторой системой N точечных масс, то после раз-

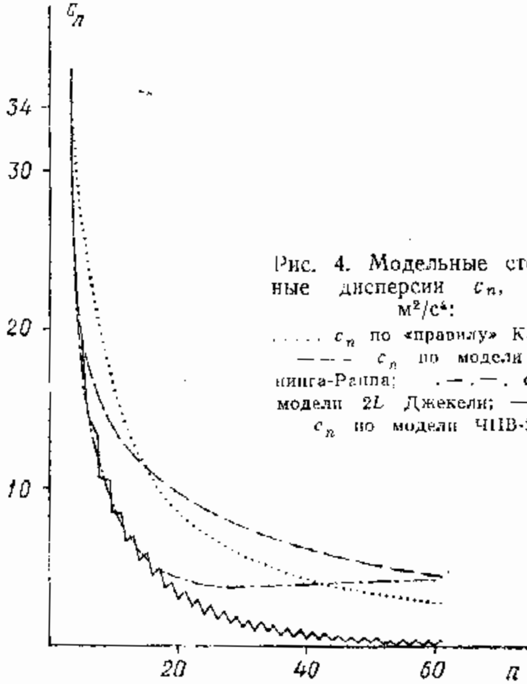

Рис. 4. Модельные степенные дисперсии c_n, 10^{-10} м²/с⁴:
. . . . . c_n по «правилу» Каулы; — — — c_n по модели Чернинга-Раппа; . — . — . c_n по модели $2L$ Джекели; ——— c_n по модели ЧПВ-2.

ложения «обратных расстояний» $1/r_i$ в ряд шаровых функций найдем соответствующие выражения для степенных дисперсий

$$c_n = \frac{(n-1)^2}{R_e^4(2n+1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \left(\frac{d_i d_j}{R_e^2}\right)^n P_n(\cos\psi_{ij}) \qquad (12)$$

и ковариационной функции

$$C(P,Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{R_e^4(2n+1)} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{d_i d_j}{R_e^2}\right)^n P_n(\cos\psi_{ij})\right] \left(\frac{R_e^2}{\rho_P \rho_Q}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi_{P,Q}), \qquad (13)$$

аномалий силы тяжести, описываемых системой точечных масс. Здесь μ_i, μ_j — значения i-й и j-й точечных масс; d_i, d_j — расстояния до них от начала координат; ψ_{ij} — сферическое расстояние между i-й и j-й массами; R_e — средний радиус Земли; P, Q — внешние точки, для которых вычисляется ковариация $C(P, Q)$.

Легко видеть теперь, что выражение (13) имеет более сложную структуру, чем таковое при использовании разложения по сферическим гармоникам. Это обусловлено неортогональностью базисных функций $\{1/r_i\}$, по которым возможно разложение T. Более того, последнее существенно усложняет и нахождение ковариаций $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_j)$ между коэффициентами μ_i, μ_j, что позволило бы использовать для устойчивого определения μ_i традиционную схему метода среднеквадратической коллокации. Расчеты показывают, что задачу определения $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$ можно свести к обращению определенной матрицы, однако значения получаемых ковариаций $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$ существенно зависят от ее размерности $(N\times N)$. Значительно проще, отказавшись от вычисления $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$, воспользоваться алгоритмом из [1, 2] и применить в нем параметры воспроизводящего ядра ЧНВ-2 при аппроксимации гравитационного потенциала в глобальном масштабе.

Список литературы: 1. *Марченко А. Н.* О построении моделей точечных масс геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 2. *Марченко А. Н.* О стабилизаторах для построения многоточечной модели геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 3. *Марченко А. Н.* Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля. — Деп. УкрНИИНТИ, 1983, № 293Ук-Д83. 4. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 5. *Jekeli C.* An investigation of two models for the degree variances of global covariance functions. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1978, Report № 275. 6. *Krarup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Copenhagen, Danish Geod. Inst., 1969, Publ. № 44. 7. *Meissl P.* A study of covariance functions related to the Earth's disturbing potential. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1971, Report № 151. 8. *Moritz H.* Advanced physical geodesy. Wichmann, 1980. 9. *Rapp R.* Potential coefficient determinations from 5° terrestrial gravity data. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1977, Report № 251. 10. *Tscherning C. C.* Representation of Covariance functions related to the anomaly potential of the Earth using reproducing Kernals. — Copenhagen, Danish Geod. Inst., 1972, Internal Report № 3. 11. *Tscherning C. C., Rapp R.* Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. — Columbus, Depth. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1974, Report № 208.

Статья поступила в редколлегию 16. 05. 83