УДК 528.22:531.26

М. И. МАРЫЧ, И. Н. ГУДЗ

О ВЫЧИСЛЕНИИ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА И ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Опыт вычисления первого приближения уклонений отвеса в горных районах показывает, что оно обеспечивает точность результата порядка 0,2—0,3″ [2, 3]. Представляют интерес вычисления второй поправки Молоденского уклонений отвеса и высот квазигеоида с целью установления ее значения и выяснения, как эта поправка улучшает результаты вычислений первого приближения. В связи с этим была предпринята попытка вычисления второй поправки с использованием численного интегрирования по палеткам Еремеева, применимого также к вычислениям на реальном исходном материале.

В данной работе рассматривается методика вычисления этой поправки на модели Земли, приведенной в [3, с. 224]. Что касается таких же вычислений первого приближения, то они освещены в [2].

1. **Формулы для вычисления второй поправки Молоденского уклонений отвеса.** Используем формулу для второй поправки, полученную в работе [1, с. 26]

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 (H-H_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)(H-H_0)^2\right]\times \frac{dS\psi}{d\psi}\cos A\,d\sigma, \tag{1}$$

где

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 = -\frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 (H-H_0)-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0^{(0)}(H-H_0)^{(0)}\right]\times \frac{d\sigma}{r^3}+\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 (H-H_0)+\frac{2}{R}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 (H-H_0); \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{3}{R}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int(\Delta g-\Delta g^{(0)})\frac{d\sigma}{r^3}-\frac{2}{R}\Delta g; \tag{4}$$

$r = 2\sin\frac{\psi}{2}$ и $d\sigma$ — элементы сферы единичного радиуса;

r — расстояние между данной и текущей точками.

Следует отметить, что последние члены в (2), (3) и (4) для плоской модели равны нулю.

После подстановки (2) в (1) выражение (1) имеет вид:

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1' (H-H_0)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)(H-H_0)^2\right]\times \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos A\,d\sigma, \tag{5}$$

где

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1' = -\frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 (H-H_0)-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0^{(0)}(H-H_0)^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3}. \tag{6}$$

Интегралы (3) и (6), определяющие функции $\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1'$, входящие в (5), аналогичны интегралу (4), представляющему собой формулу Нумерова для вертикального градиента аномалии силы тяжести. Поэтому методика численного интегрирования здесь такая же, как и при вычислении вертикального градиента.

Рабочая формула для стоксово приближения вертикального градиента имеет вид:

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 - \sum_{i=0}^{n} c_i(\Delta g_c - \Delta g_п). \qquad (7)$$

Коэффициенты c_i определяем радиусами ρ_i палетки:

$$c_i = \left(\frac{1}{\rho_{i+1}} - \frac{1}{\rho_i}\right),$$

Δg_c — осредненное значение аномалии силы тяжести по кольцам палетки; $\Delta g_п$ — значение аномалии силы тяжести в данной точке.

Значения радиусов рабочей палетки (в км) и коэффициентов c_i приведены ниже:

Радиусы палетки	c_i	Радиусы палетки	c_i
0,1	7,5	3,4	0,086
0,4	1,25	4,8	0,056
0,8	0,536	6,6	0,036
1,4	0,260	8,6	0,030
2,2	0,160	11,6	0,022
		15,6	

2. **Практическое вычисление второй поправки уклонений отвеса.** Вторая поправка была определена для точки поверхности модели, отстоящей от оси симметрии на расстоянии $l=2,4$ км [3]. Предварительно были найдены в 32 точках градиенты $\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0$ по значениям аномалий силы тяжести, приведенным в [3]. Были вычислены также высоты H, $H-H_0$, как и $\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1'$ и $\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0$, позволяющие найти значения подынтегральной функции в (5), которые приведены в таблице. Окончательное значение подынтегральной функции в (5) приведено в графе 9 таблицы.

Теперь значение ξ_2 представляет собой не что иное, как вычисление уклонения отвеса по палетке Еремеева. Значение ξ_2 за влияние центральной зоны от 0 до 5 км равно $+0,28''$, влияние остальных зон равно $+0,04''$. Итак, $\xi_2=0,3''$.

Результат более строгого, аналитического вычисления этой же поправки, приведен в [3] и равен $\xi_2 - +0,1''$. Так как уклонение отвеса для исследуемой точки составляет $17,7''$ [3], то вторая поправка представляет собой приблизительно его $\frac{1}{200}$ долю, т. е.

Значения для получения подынтегральной функции формулы (1)

l, км	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial g}\right)_0$ мГал/км	H, км	$H-H_0$, км	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \times (H-H_0)$	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)'_1$	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)'_1 \times (H-H_0)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 \times (H-H_0)^2$	Значения —(7)+(8)
0,0	—101,11	4,050	0,350	—35,388	46,38	16,23	6,02	—22,25
0,2	— 97,20	4,045	0,345	—33,634	52,12	17,98	4,50	—22,48
0,4	— 96,78	4,026	0,326	—31,550	47,79	15,58	4,68	—20,26
0,5	— 93,96	4,015	0,315	—29,408	27,58	8,69	3,35	—12,04
0,6	— 92,31	4,000	3,000	—27,693	37,86	11,36	3,97	—15,33
0,7	— 91,49	3,983	0,283	—25,892	33,26	9,41	4,76	—14,18
0,9	— 86,90	3,950	0,250	—21,725	34,61	8,65	4,04	—12,69
1,1	— 66,32	3,917	0,217	14,391	0,31	0,07	0,07	— 0,14
1,4	— 60,92	3,867	0,167	—10,174	— 0,48	— 0,08	1,07	— 0,99
1,7	— 43,06	3,817	0,117	— 5,038	— 4,32	— 0,50	—0,02	0,52
2,1	— 30,45	3,750	0,050	— 1,522	— 5,42	— 0,27	0,01	0,26
2,4	— 23,68	3,700	0,	0	— 4,35	0	0	0
2,6	— 19,64	3,667	—0,033	0,648	— 3,66	0,12	—1,21	1,09
2,9	— 15,97	3,617	—0,083	1,326	— 2,37	0,20	—0,07	— 0,13
3,4	— 13,75	3,533	—0,167	2,296	— 4,10	0,68	0,03	— 0,71
4,2	7,43	3,400	—0,300	2,229	— 1,20	0,36	—0,19	— 0,17
5,2	— 5,89	3,233	—0,467	2,751	— 5,26	2,46	0,38	— 2,84
5,8	— 1,61	3,133	—0,567	+ 0,913	+ 1,53	— 0,87	0,87	0
6,6	— 0,70	3,000	—0,700	+ 0,490	— 1,67	1,17	—0,15	— 1,02
7,4	0,57	2,867	—0,833	— 0,475	— 1,96	1,63	0,36	— 1,99
8,2	2,19	2,733	—0,967	— 2,118	0,14	— 0,14	—0,56	0,70
9,1	3,36	2,583	—1,117	— 3,753	— 0,39	0,44	—0,85	0,41
9,6	3,96	2,500	—1,200	— 4,752	1,4[illegible]	— 1,68	—1,17	2,85
10,4	4,39	2,367	—1,333	— 5,852	3,57	— 4,76	—3,89	8,65
11,7	3,28	2,150	—1,550	— 5,084	— 2,02	3,13	—0,31	— 2,82
15,1	2,63	1,583	—2,117	— 5,568	1,52	— 3,22	—1,25	4,47
19,3	0,89	0,883	—2,817	— 2,507	— 0,89	2,51	0,69	— 3,20
24,6	0,50	0	—3,700	— 1,850	0,88	— 3,26	0,79	2,47
30,0	0,114	0	—3,700	0,422	— 0,22	0,81	0,40	— 1,21
45,0	0,0865	0	—3,700	— 0,320	0,01	— 0,04	0	0,04
60,0	— 0,0105	0	—3,700	0,039	— 0,02	0,07	0	— 0,07
80,0	— 0,000052	0	—3,700	0,000	0	0	0	0

значение порядка сжатия Земли. Порядок этой поправки совпадает с точностью определения уклонения отвеса. Имеется в виду точность вывода формул и точность вычисления уклонения отвеса в нулевом и первом приближениях.

Из выполненных исследований можно заключить, что при практических вычислениях на реальном материале вторая поправка во многих случаях тоже будет такого же порядка и может не учитываться. Однако ее вычисление представляет интерес, если находят только порядок поправки. В этом случае она характеризует точность вычисления уклонения отвеса в первом приближении, которая, судя по результатам вычислений для данной модели, является довольно высокой. Следует отметить, что используемую здесь методику можно применить для вычисления второй поправки уклонений отвеса в практике геодезического производства.

Данные, приведенные в таблице, позволяют без затруднения вычислить, вторую поправку высоты квазигеоида, только вместо формул Венинг-Мейнеса должна быть использована формула Стокса. Можно надеяться, что выводы, сделанные относительно вычислений уклонений отвеса, в такой же мере относятся и к вычислениям высот квазигеоида, так как высоты являются более гладкой функцией, чем уклонения отвеса.

Список литературы: 1. *Марыч М. И.* О вычислении уклонений отвеса на физической поверхности Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 18. 2.*Марыч М. И., Гудз И. П., Доулит П. Д.* Опыт вычисления уклонения отвеса на моделях Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 18. 3. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф. Юркина М. И* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131.

Статья поступила в **редколлегию** 11. 05. 83