$C^+(\psi=0)$ и $C^-(\psi=0)$, но и получить эмпирические $C^+(\psi)$ и $C^-(\psi)$ для $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$ с целью их применения для уточнения модели.

Наконец, приведем некоторые соотношения для вычисления степенных дисперсий аномалий силы тяжести, моделируемых совокупностью дискретных точечных масс. Если воспользоваться описанием возмущающего потенциала T и далее аномалий силы тяжести Δg некоторой системой N точечных масс, то после раз-

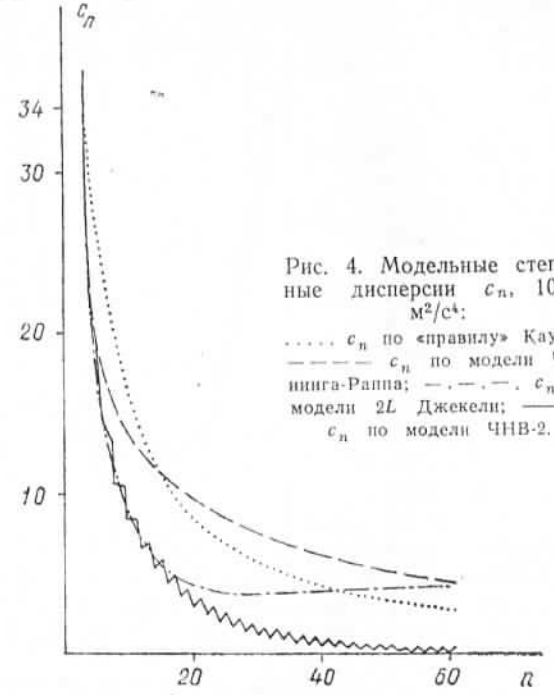

Рис. 4. Модельные степенные дисперсии c_n, 10^{-10} м²/с⁴:
. . . . . c_n по «правилу» Каулы; — — — — c_n по модели Чернинга-Раппа; —.—.—. c_n по модели 2L Джекели; ——— c_n по модели ЧНВ-2.

ложения «обратных расстояний» $1/r_i$ в ряд шаровых функций найдем соответствующие выражения для степенных дисперсий

$$c_n = \frac{(n-1)^2}{R_e^4(2n+1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \left(\frac{d_i d_j}{R_e^2}\right)^n P_n(\cos\psi_{ij}) \qquad (12)$$

и ковариационной функции

$$C(P,Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{R_e^4(2n+1)} \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_i \mu_j \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{d_i d_j}{R_e^2}\right)^n P_n(\cos\psi_{ij})\right] \left(\frac{R_e^2}{\rho_P \rho_Q}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi_{P,Q}). \qquad (13)$$

аномалий силы тяжести, описываемых системой точечных масс. Здесь μ_i, μ_j — значения i-й и j-й точечных масс; d_i, d_j — расстоя-

ния до них от начала координат; ψ_{ij} — сферическое расстояние между i-й и j-й массами; R_e — средний радиус Земли; P, Q — внешние точки, для которых вычисляется ковариация $C(P, Q)$.

Легко видеть теперь, что выражение (13) имеет более сложную структуру, чем таковое при использовании разложения по сферическим гармоникам. Это обусловлено неортогональностью базисных функций $\{1/r_i\}$, по которым возможно разложение T. Более того, последнее существенно усложняет и нахождение ковариаций $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_j)$ между коэффициентами μ_i, μ_j, что позволило бы использовать для устойчивого определения μ_i традиционную схему метода среднеквадратической коллокации. Расчеты показывают, что задачу определения $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$ можно свести к обращению определенной матрицы, однако значения получаемых ковариаций $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$ существенно зависят от ее размерности $(N \times N)$. Значительно проще, отказавшись от вычисления $\mathrm{cov}(\mu_i, \mu_i)$, воспользоваться алгоритмом из [1, 2] и применить в нем параметры воспроизводящего ядра ЧНВ-2 при аппроксимации гравитационного потенциала в глобальном масштабе.

Список литературы: 1. *Марченко А. Н.* О построении моделей точечных масс геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 2. *Марченко А. Н.* О стабилизаторах для построения многоточечной модели геопотенциала вариационным методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 37. 3. *Марченко А. Н.* Гильбертовы пространства функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара, и глобальная ковариационная функция аномального поля. — Деп. УкрНИИНТИ, 1983, № 293Ук-Д83. 4. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 5. *Jekeli C.* An investigation of two models for the degree variances of global covariance functions. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1978, Report № 275. 6. *Krurup T.* A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy. — Copenhagen, Danish Geod. Inst., 1969, Publ. № 44. 7. *Meissl P.* A study of covariance functions related to the Earth's disturbing potential. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1971, Report № 151. 8. *Moritz H.* Advanced physical geodesy. Wichmann, 1980. 9. *Rapp R.* Potential coefficient determinations from 5° terrestrial gravity data. — Columbus, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1977, Report № 251. 10. *Tscherning C. C.* Representation of Covariance functions related to the anomaly potential of the Earth using reproducing Kernals. — Copenhagen, Danish Geod. Inst., 1972, Internal Report № 3. 11. *Tscherning C. C., Rapp R.* Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. — Columbus, Depth. of Geod. Sci., Ohio State Univ., 1974, Report № 208.

Статья поступила в редколлегию 16. 05. 85

УДК 528.22:531.26

М. И. МАРЫЧ, И. Н. ГУДЗ

О ВЫЧИСЛЕНИИ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА И ВЫСОТ КВАЗИГЕОИДА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Опыт вычисления первого приближения уклонений отвеса в горных районах показывает, что оно обеспечивает точность результата порядка 0,2—0,3″ [2, 3]. Представляют интерес вычисления второй поправки Молоденского уклонений отвеса и высот квазигеоида с целью установления ее значения и выяснения, как эта поправка улучшает результаты вычислений первого приближения. В связи с этим была предпринята попытка вычисления второй поправки с использованием численного интегрирования по палеткам Еремеева, применимого также к вычислениям на реальном исходном материале.

В данной работе рассматривается методика вычисления этой поправки на модели Земли, приведенной в [3, с. 224]. Что касается таких же вычислений первого приближения, то они освещены в [2].

1. Формулы для вычисления второй поправки Молоденского уклонений отвеса. Используем формулу для второй поправки, полученную в работе [1, с. 26]

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \left[-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1 (H - H_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)(H - H_0)^2 \right] \times \times \frac{dS\psi}{d\psi} \cos A d\sigma, \tag{1}$$

где

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1 = -\frac{1}{2\pi R} \int \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 (H - H_0) - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0^{(0)} (H - H_0)^{(0)} \right] \times \times \frac{d\sigma}{r^3} + \left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 (H - H_0) + \frac{2}{R}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 (H - H_0); \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0^{(0)} \right] \frac{d\sigma}{r^3} - \frac{3}{R}\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int (\Delta g - \Delta g^{(0)}) \frac{d\sigma}{r^3} - \frac{2}{R} \Delta g; \tag{4}$$

$r = 2 \sin \frac{\psi}{2}$ и $d\sigma$ — элементы сферы единичного радиуса;

r — расстояние между данной и текущей точками.

Следует отметить, что последние члены в (2), (3) и (4) для плоской модели равны нулю.

После подстановки (2) в (1) выражение (1) имеет вид:

$$\xi_2 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \left[-\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1' (H - H_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)(H - H_0)^2 \right] \times \times \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos A d\sigma, \tag{5}$$

где

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1' = -\frac{1}{2\pi R} \int \left[\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 (H - H_0) - \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0^{(0)} (H - H_0)^{(0)} \right] \frac{d\sigma}{r^3}. \tag{6}$$

Интегралы (3) и (6), определяющие функции $\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1'$, входящие в (5), аналогичны интегралу (4), представляющему собой формулу Нумерова для вертикального градиента аномалии силы тяжести. Поэтому методика численного интегрирования здесь такая же, как и при вычислении вертикального градиента.

Рабочая формула для стоксово приближения вертикального градиента имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i (\Delta g_c - \Delta g_\text{ц}). \tag{7}$$

Коэффициенты c_i определяем радиусами ρ_i палетки:

$$c_i = \left(\frac{1}{\rho_{i+1}} - \frac{1}{\rho_i}\right),$$

Δg_c — осредненное значение аномалии силы тяжести по кольцам палетки; $\Delta g_\text{ц}$ — значение аномалии силы тяжести в данной точке.

Значения радиусов рабочей палетки (в км) и коэффициентов c_i приведены ниже:

Радиусы палетки	c_i	Радиусы палетки	c_i
0,1	7,5	3,4	0,086
0,4	1,25	4,8	0,056
0,8	0,536	6,6	0,036
1,4	0,260	8,6	0,030
2,2	0,160	11,6	0,022
		15,6	

2. Практическое вычисление второй поправки уклонений отвеса. Вторая поправка была определена для точки поверхности модели, отстоящей от оси симметрии на расстоянии $l = 2{,}4$ км [3]. Предварительно были найдены в 32 точках градиенты $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0$ по значениям аномалий силы тяжести, приведенным в [3]. Были вычислены также высоты H, $H - H_0$, как и $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_1'$ и $\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0$, позволяющие найти значения подынтегральной функции в (5), которые приведены в таблице. Окончательное значение подынтегральной функции в (5) приведено в графе 9 таблицы.

Теперь значение ξ_2 представляет собой не что иное, как вычисление уклонения отвеса по палетке Еремеева. Значение ξ_2 за влияние центральной зоны от 0 до 5 км равно $+0{,}28''$, влияние остальных зон равно $+0{,}04''$. Итак, $\xi_2 = 0{,}3''$.

Результат более строгого, аналитического вычисления этой же поправки, приведен в [3] и равен $\xi_2 = +0{,}1''$. Так как уклонение отвеса для исследуемой точки составляет $17{,}7''$ [3], то вторая поправка представляет собой приблизительно его $\frac{1}{200}$ долю, т. е.

Значения для получения подынтегральной функции формулы (1)

l, км	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial g}\right)_0$, м Гал/км	H, км	$H-H_0$, км	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \times (H-H_0)$	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)'_1$	$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)'_1 \times (H-H_0)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Delta g}{\partial \rho^2}\right)_0 \times (H-H_0)^2$	Значения $-(7)+(8)$
0,0	−101,11	4,050	0,350	−35,388	46,38	16,23	6,02	−22,25
0,2	−97,20	4,045	0,345	−33,634	52,12	17,98	4,50	−22,48
0.4	−96,78	4,026	0,326	−31,550	47,79	15,58	4,68	−20,26
0,5	−93,96	4,015	0,315	−29.408	27,58	8,69	3,35	−12,04
0,6	−92,31	4,000	3,000	−27,693	37,86	11,36	3,97	−15,33
0,7	−91,49	3,983	0,283	−25,892	33,26	9,41	4,76	−14.18
0,9	−86,90	3,950	0,250	−21,725	34,61	8,65	4,04	−12.69
1,1	−66,32	3,917	0,217	−14,391	0,31	0,07	0,07	−0,14
1,4	−60,92	3,867	0,167	−10,174	−0,48	−0,08	1,07	−0,99
1,7	−43,06	3,817	0.117	−5,038	−4.32	−0,50	−0,02	0,52
2,1	−30,45	3,750	0,050	−1,522	−5,42	−0,27	0,01	0,26
2,4	−23,68	3,700	0,	0	−4,35	0	0	0
2,6	−19,64	3,667	−0,033	0,648	−3,66	0,12	−1,21	1.09
2,9	−15,97	3,617	−0,083	1,326	−2,37	0,20	−0.07	−0,13
3,4	−13,75	3,533	−0,167	2,296	−4,10	0,68	0.03	−0,71
4,2	−7,43	3,400	−0,300	2,229	−1,20	0,36	−0.19	−0,17
5,2	−5,89	3,233	−0,467	2,751	−5,26	2,46	0.38	−2,84
5,8	−1,61	3,133	−0,567	+0,913	+1,53	−0,87	0,87	0
6,6	−0,70	3,000	−0,700	+0,490	−1,67	1,17	−0,15	−1,02
7,4	0,57	2,867	−0,833	−0,475	−1,96	1,63	0,36	−1,99
8,2	2,19	2,733	−0,967	−2,118	0,14	−0,14	−0,56	0,70
9,1	3,36	2,583	−1,117	−3,753	−0,39	0,44	−0,85	0,41
9,6	3,96	2,500	−1,200	−4,752	1,40	−1,68	−1,17	2,85
10,4	4,39	2,367	−1,333	−5,852	3,57	−4,76	−3,89	8,65
11,7	3,28	2,150	−1,550	−5,084	−2,02	3,13	−0,31	−2,82
15,1	2,63	1,583	−2,117	−5,568	1,52	−3,22	−1,25	4,47
19,3	0,89	0,883	−2,817	−2,507	−0,89	2,51	0,69	−3,20
24,6	0,50	0	−3,700	−1,850	0,88	−3,26	0,79	2,47
30,0	0,114	0	−3,700	−0,422	−0,22	0,81	0,40	−1,21
45,0	0,0865	0	−3,700	−0,320	0,01	−0,04	0	0,04
60,0	−0,0105	0	−3,700	0,039	−0,02	0,07	0	−0,07
80,0	−0,000052	0	−3,700	0,000	0	0	0	0

значение порядка сжатия Земли. Порядок этой поправки совпадает с точностью определения уклонения отвеса. Имеется в виду точность вывода формул и точность вычисления уклонения отвеса в нулевом и первом приближениях.

Из выполненных исследований можно заключить, что при практических вычислениях на реальном материале вторая поправка во многих случаях тоже будет такого же порядка и может не учитываться. Однако ее вычисление представляет интерес, если находят только порядок поправки. В этом случае она характеризует точность вычисления уклонения отвеса в первом приближении, которая, судя по результатам вычислений для данной модели, является довольно высокой. Следует отметить, что используемую здесь методику можно применить для вычисления второй поправки уклонений отвеса в практике геодезического производства.

Данные, приведенные в таблице, позволяют без затруднения вычислить вторую поправку высоты квазигеоида, только вместо формул Венинг-Мейнеса должна быть использована формула Стокса. Можно надеяться, что выводы, сделанные относительно вычислений уклонений отвеса, в такой же мере относятся и к вычислениям высот квазигеоида, так как высоты являются более гладкой функцией, чем уклонения отвеса.

Список литературы: 1. *Марыч М. И.* О вычислении уклонений отвеса на физической поверхности Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 18. 2.*Марыч М. И., Гудз И. Н., Двулит П. Д.* Опыт вычисления уклонения отвеса на моделях Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 18. 3. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф. Юркина М. И* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131.

Статья поступила в редколлегию 11. 05. 83

УДК 528.21

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ СУММОЙ ПОТЕНЦИАЛОВ ПЛОСКИХ СЛОЕВ

§ 1. Потенциал

$$V(P) = \int \frac{\delta_Q}{l_{PQ}} d\tau_Q, \quad Q \in \tau, \quad P \notin \tau, \tag{1}$$

развиваемый телом τ ($\delta > 0$ — плотность его масс) во внешнем относительно σ пространстве (σ — граница тела τ), может быть истолкован не только заданным распределением δ масс внутри данной поверхности σ, но и бесчисленным множеством иных способов. Например, полагая поверхность σ тела τ неизменной, можно считать, что V создается во всем пространстве вне σ массами внутри σ плотности $\delta + \rho$, где ρ — плотность так называемого тела нулевого внешнего потенциала [5], вычисляемая по формуле $\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta W$ при любой функции $W \in C^2_\tau$, подчиненной условиям $W\Big|_\sigma = \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_\sigma = 0$. А если кроме поверхности σ тела, предполагаемой достаточно гладкой поверхностью Ляпунова *, допустить еще известными на ней значения потенциала V и его нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$, то согласно [2, 5] и других руководств по теории

* К таким поверхностям относят, например, ограниченные замкнутые поверхности класса C^2 [2].