УДК 528.21

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТЫ СУММОЙ ПОТЕНЦИАЛОВ ПЛОСКИХ СЛОЕВ

§ 1. Потенциал

$$V(P)=\int\frac{\delta_Q}{l_{PQ}}\,d\tau_Q,\quad Q\in\tau,\ P\notin\tau, \tag{1}$$

развиваемый телом τ ($\delta>0$ — плотность его масс) во внешнем относительно σ пространстве (σ — граница тела τ), может быть истолкован не только заданным распределением δ масс внутри данной поверхности σ, но и бесчисленным множеством иных способов. Например, полагая поверхность σ тела τ неизменной, можно считать, что V создается во всем пространстве вне σ массами внутри σ плотности $\delta+\rho$, где ρ — плотность так называемого тела нулевого внешнего потенциала [5], вычисляемая по формуле $\rho=-\frac{1}{4\pi}\Delta W$ при любой функции $W\in C^2_\tau$, подчиненной условиям $W\Big|_\sigma=\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_\sigma=0$. А если кроме поверхности σ тела, предполагаемой достаточно гладкой поверхностью Ляпунова *, допустить еще известными на ней значения потенциала V и его нормальной производной $\frac{\partial V}{\partial n}$, то согласно [2, 5] и других руководств по теории

---

* К таким поверхностям относят, например, ограниченные замкнутые поверхности класса C^2 [2].

потенциала и математической физике, как следует из фундаментальной формулы Грина, потенциал V тела τ вне σ может быть представлен суммой потенциалов простого и двойного слоев, расположенных на σ:

$$V(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} \frac{1}{l_{PQ}}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\sigma} d\sigma_Q +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma} V_Q \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l_{PQ}}\right) d\sigma_Q,\ Q \in \sigma,\ P \notin \sigma. \quad (2)$$

Возможность представления объемного потенциала потенциалами двух слоев

$$V = V' + V'' \quad (3)$$

или даже одного из них имеет основополагающее значение в математической физике при исследовании и решении краевых задач теории потенциала. Так как здесь обсуждается вопрос о разнообразии форм описания внешнего объемного потенциала **V**, то, имея образец его представления (2) и учитывая непрерывность потенциалов слоев (простого и двойного) во внешнем по отношению к ним пространстве, будем считать, что этот потенциал может быть многообразно представлен в виде суммы (3), в которой потенциал простого слоя

$$V'(P) = \int\limits_{S} \frac{\mu_Q\, dS_Q}{l_{PQ}},\ Q \in S,\ P \notin S \quad (4)$$

и потенциал двойного слоя

$$V''(P) = \int\limits_{S} \nu_Q \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l_{PQ}}\right) dS_Q,\ Q \in S,\ P \notin S \quad (5)$$

соответственно с плотностями μ и ν отнесены к некоторой заданной ограниченной гладкой двухсторонней поверхности S, расположенной внутри σ и не имеющей с ней общих точек; плотности μ и ν этих слоев требуется определить. При этом следует предполагать, что сумма потенциалов этих слоев выражает на σ и в области между σ и S аналитическое продолжение внешнего потенциала V во внутрь тела τ, если, конечно, оно осуществимо. Легко видеть, что формулируемая так потенциалографическая задача является, по существу, одной из разновидностей обратных проблем теории потенциала.

Заметим, что, если для заданного тела τ мы сможем каким-то образом разделить его потенциал на две части V' и V'', которые хотим затем принять за потенциалы слоев (соответственно простого и двойного), лежащих на выбранной априори поверхности S, объемлемой поверхностью σ тела τ, то (4) и (5) относительно плотностей μ и ν этих слоев можно рассматривать как интегральные уравнения I рода с непрерывными ядрами. Условия разрешимости этих уравнений будут тогда подтверждением правильности выбора поверхности S и правомочности принятого разделения V на части V' и V''.

§ 2. От поверхностей S, на которых для описания потенциала V тела суммой (3)—(5) предполагается поместить простой и двойной слои, требуется только возможность размещения на них этих слоев. Последние должны развивать в окружающем их внешнем пространстве потенциалы притяжения, значения которых (и их производных) в точках самих слоев для рассматриваемой задачи несущественны. Значит нет необходимости брать поверхности S из класса поверхностей Ляпунова, поэтому за поверхности $S \subset C^1$ здесь приняты ограниченные гладкие двухсторонние поверхности, т. е. такие, которые могут нести на себе указанные слои, причем эти поверхности, будучи расположенными в области τ, не должны иметь общих точек с ее границей-поверхностью σ.

Поверхности S могут быть замкнутыми и могут быть незамкнутыми. Во втором случае они должны быть ограничены одной или несколькими гладкими замкнутыми кривыми. Простейшими замкнутыми поверхностями S являются области некоторой плоскости, например, плоскости сечения тела τ. Очевидно, располагая слои в плоскостях сечения, целесообразно выбирать сечения, проходящие через центр масс тела τ и содержащие его диаметр, поскольку такие сечения тела наиболее полно отвечают ему. Возможность использования таких плоских слоев подсказывается трактовкой [4] потенциала однородного эллипсоида с полуосями a, b, c потенциалом неоднородного эллиптического слоя (диска) с полуосями $\sqrt{a^2-c^2}$, $\sqrt{b^2-c^2}$, расположенного в плоскости, определяемой осями эллипсоида $2a$, $2b$.

Обрисовав широкие возможности выбора поверхностей S для описания объемного потенциала V какого-либо тела τ суммой (3)—(5), мы представим далее потенциал планеты, используя именно плоские слои в ее экваториальном сечении.

§ 3. Далее под телом τ, создающим потенциал V, будем понимать планету. Поверхность σ планеты всегда можно аппроксимировать уровенной поверхностью σ_0 потенциала $V=\text{const}=V_0$. За σ_0 можно принять, например, поверхность уровня потенциала V, охватывающую поверхность планеты σ и касающуюся ее в ряде точек. Рассматривая тогда область τ_0, ограниченную уровенной поверхностью σ_0 и содержащую внутри себя все массы тела τ, скажем, что ей соответствует во внешнем пространстве потенциал $V_0(P) \approx V(P)$.

Воспользуемся для потенциала $V_0(P)$ формулой (2), в которой вследствие известного свойства интеграла Гаусса второе слагаемое обратится в нуль. Тогда получим

$$V_0(P) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma_0} \frac{1}{l}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma = V'_0(P).$$

Из этой формулы с учетом характера убывания потенциалов слоев на бесконечности (при значительных расстояниях l от тела потенциал простого слоя V' убывает не менее быстро, чем $1/l$, а двойного слоя V'' — не менее быстро, чем $1/l^2$ [2,5]) следует, что потенциал простого слоя $V'(P)$ в (2) можно считать главной частью потенциала планеты. Поэтому, рассматривая представления потенциала в виде (3), будем так подбирать потенциалы слоев V' и V'', чтобы всюду вне σ выполнялось неравенство

$$V'(P) > |V''(P)|,$$

свойственное потенциалам планет.

§ 4. К вопросу представления потенциала планеты суммой двух слагаемых можно подойти и по-другому. Будем исходить из принципа симметрии.

Пусть потенциал V планеты отнесен к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, начало которой совмещено с центром масс планеты, а ось z совпадает с ее осью вращения (эффект вращения планеты здесь не учитывается, система координат полагается жестко закрепленной в планете). Потенциал V рассматривается вне σ, т. е. во всей бесконечной области T_σ, ограниченной поверхностью σ. Так как в общем случае замкнутая поверхность σ не симметрична относительно экваториальной плоскости планеты, то и область T_σ относительно этой плоскости таковой не является. Будем поэтому рассматривать потенциал V в бесконечной области T_Σ, ограниченной замкнутой поверхностью Σ, расположенной внутри σ, не имеющей с ней общих точек и являющейся симметричной относительно экваториальной плоскости планеты. За Σ можно принять, например, сферу Σ_R или даже эллипсоид с центрами в O. Понимая под V в слое между σ и Σ аналитическое продолжение потенциала (1), осуществляемое той функцией, которая задавала потенциал в T_σ, видим, что теперь внешний потенциал V (вместе с его аналитическим продолжением до Σ) задан на симметричном множестве точек, именно, в области T_Σ.

Поскольку любую функцию, заданную на симметричном множестве, единственным образом можно представить суммой четной и нечетной функций, напишем для внешнего потенциала

$$V = V_{\text{чет}} + V_{\text{неч}}, \tag{6}$$

где использованные справа символы обозначают четную и нечетную составляющие потенциала V относительно удаления от экваториальной плоскости планеты:

$$V_{\text{чет}}(x, y, -z) = V_{\text{чет}}(x, y, z); \quad V_{\text{неч}}(x, y, -z) = -V_{\text{неч}}(x, y, z).$$

Известно, что основной частью потенциала притяжения планеты является потенциал эллипсоида, аппроксимирующего ее.

Кроме того, потенциал однородного эллипсоида или даже неоднородного, но с эллипсоидально слоистой структурой при надлежащем выборе системы координат является четной функцией по каждой координате.

Но потенциал эллипсоида можно трактовать потенциалом эллиптического диска в плоскости экватора, поэтому отождествим теперь четную часть $V_{\text{чет}}$ потенциала V планеты с потенциалом V' простого слоя, а нечетную $V_{\text{неч}}$ — с потенциалом V'' двойного слоя, каждый из которых расположен в плоскости экватора планеты $z=0$ и имеет очертания S ее экваториального сечения, причем $r_S=r_\sigma-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число.

Заметим, что в случае гидростатически равновесных планет, которые обладают еще и осевой симметрией, $V_{\text{неч}}-V''=0$.

§ 5. Предыдущие рассуждения позволяют теперь потенциал V планеты представить в виде суммы (3)—(5):

$$V(P)=\int\limits_S \frac{\mu dS}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}}+$$

$$+\int\limits_S \frac{z\nu dS}{(\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2})^3}, \tag{7}$$

где $P(x,\ y,\ z)$ — точка, внешняя относительно планеты; ξ, η — координаты текущей точки в ее экваториальном сечении; $dS=$ $=d\xi d\eta$, $\mu=\mu(\xi,\ \eta)$ и $\nu=\nu(\xi,\ \eta)$ — плотности плоских слоев, соответственно простого и двойного.

При написании здесь потенциала двойного слоя использована (5), в которой за положительное направление нормали к S взято отрицательное направление оси z. Потенциал двойного слоя в (7) можно записать также в виде

$$V''(P)=\int\limits_S \nu\frac{\cos\gamma}{l^2}dS,$$

где $l^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2$ и γ — угол в точке $Q(\xi,\ \eta)\in S$ между $l-l_{QP}$ и прямой, параллельной оси z (в ее положительном направлении).

Из (7) легко усматривается четность относительно z потенциала простого слоя (первое слагаемое) и нечетность потенциала двойного слоя (второе слагаемое).

Подчеркнем еще раз, что областью интегрирования S является плоская область — открытая область экваториального сечения планеты, которую с высокой степенью точности можно считать ограниченной эллипсом.

Формула (7) показывает, что потенциал V тела τ, вводимый тройным интегралом по области, занятой его массами, сведен к интегралу по плоской области — к двойному интегралу по области его экваториального сечения, в подынтегральную функцию которого входят, правда, две функции $\mu(\xi,\eta)$, $\nu(\xi,\eta)$ вместо одной $\delta(\xi,\eta,\zeta)$ в определяющем выражении (1) потенциала V. Такая редукция тройного интеграла к двойному является, безусловно, следствием природы потенциалов как гармонических функций.

Если для потенциала V планеты τ каким-то образом удается выделить его четную $V_{\text{чет}}$ и нечетную $V_{\text{неч}}$ части, то, считая их заданными, после приравнивания их к потенциалам слоев (7) имеем для определения плотностей $\mu(\xi, \eta)$ и $\nu(\zeta, \eta)$ этих слоев два интегральных уравнения I рода с непрерывными ядрами, нелинейно зависящими от параметра z; см. далее уравнения (9) и (10).

§ 6. Покажем на примере классического представления потенциала разделение его на четную и нечетную части. Выпишем общепринятое его разложение по шаровым функциям

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m (\cos\vartheta), \quad (8)$$

где r, ϑ, λ — полярные координаты внешней точки P; C_{nm}, S_{nm} — коэффициенты разложения (параметры гравитационного поля, стоксовы постоянные планеты); P_n^m $(\cos\vartheta)$ — присоединенные функции Лежандра.

В соответствии с аппроксимационной трактовкой этого ряда [3] вне любой сферы Σ_R, упомянутой в § 4 (здесь считаем $R > 1$), он описывает вне σ внешний потенциал V планеты, а в слое между σ и Σ_R — его аналитическое продолжение. Поэтому рассматривая ряд (8) в бесконечной области T_{Σ_R} внешней относительно сферы Σ_R, как в симметричной области относительно плоскости $z=0$, выделим из него четную и нечетную составляющие относительно z или $\cos\vartheta$, ибо $z = r\cos\vartheta$, а $r > 0$. Для этого воспользуемся свойством присоединенных функций Лежандра [1]

$$P_n^m(-\cos\vartheta) = (-1)^{n-m} P_n^m(\cos\vartheta),$$

показывающим, что четная часть $V_{\text{чет}}$ содержит в себе только те члены ряда (8), в коэффициентах которых $n-m=2k$, а нечетная $V_{\text{неч}}$ — те, в которых $n-m=2k+1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$

Такое разделение (8) на четную и нечетную части можно сравнить с выделением из него зональной и незональной частей: тессеральной и секториальной. Последнее следует классификации сферических функций, поэтому оно при изучении свойств гравитационных полей планет и их самих отражает некоторые черты применяемого аппарата. Представление же ряда суммой четной и нечетной составляющих, с одной стороны, выделяет свойства планет, обусловленные принципом симметрии, т. е. свойства, присущие природе самих исследуемых объектов, а с другой, — наиболее естественно связывает каждую из частей объемного потенциала с другими главными видами ньютоновского потенциала, относимыми к основной плоскости планеты. При таком подходе, в частности при объединении его с традиционными концепциями, выявляются новые возможности для анализа, интерпретации параметров гравитационного поля и для получения их по результатам наблюдений.

§ 7. Выпишем теперь указанные в § 5 интегральные уравнения, определяющие плотности введенных здесь слоев

$$\int\limits_{S} \frac{\mu(\xi, \eta)\, dS}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}} = V'(x, y, z) = V_{\text{чет}}(x, y, z); \quad (9)$$

$$\int\limits_{S} \frac{z\nu(\xi, \eta)\, dS}{\left(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}\right)^3} = V''(x, y, z) = V_{\text{неч}}(x, y, z). \quad (10)$$

Обсудим их конструкцию и пути нахождения плотностей μ и ν.

Условимся простой слой, связанный с (9), называть материальным диском *МД*, или S', а двойной слой, описываемый (10), — дипольным диском *ДД*, или S''. Оба диска расположены в плоскости экватора планеты и совмещены друг с другом. И, если раньше мы говорили [4], что «при расстояниях, сравнимых с размерами планеты, она притягивает как *диск, нагруженный гравитирующей сферой*», то теперь, введя *МД* и *ДД*, скажем определеннее «...как *два экваториальных совмещенных диска: материальный и дипольный*».

Для планет, у которых выражена трехосность их фигур (Марс, Земля), эти диски, повторяя контуры их экваториальных сечений, являются эллипсами. А у планет, трехосность которых очень слабо выражена и практически пренебрегаема (Венера, Луна), и у гидростатически равновесных планет (планеты-гиганты: Юпитер, Сатурн) эти диски круговые, причем у последних *ДД* отсутствуют.

Для любой планеты из ее *МД* можно выделить основную часть S_0 — меньший диск, но несущий всю массу планеты; его диаметр легко определяется по размерам эллипсоида, аппроксимирующего фигуру планеты.

Диски S'' и S' S_0 являются, естественно, безмассовыми.

Основная задача, к которой сводится вычисление внешнего потенциала планеты при обсуждаемом его представлении, заключается в определении плотностей введенных дисков. В случае заданных $V_{\text{чет}}$ и $V_{\text{неч}}$ они находятся из уравнений (9) и (10). Рассмотрим ниже аналитический метод решения этой задачи, соответствующий случаю, когда известны стоксовы постоянные планеты до некоторого порядка N включительно, т. е. их общее число $(N+1)^2$.

Правая часть (9) содержит $(N+1)(N+2)/2$ коэффициентов (это легко подсчитать с учетом того, что в $V_{\text{чет}}$ сохраняются лишь те C_{nm}, S_{nm}, у которых $n-m=2k$, а правая часть (10) содержит $N(N+1)$ коэффициентов, ибо $V_{\text{неч}}$ имеет только C_{nm}, S_{nm} при $n-m=2k+1$.

Известно, что всякая функция двух переменных для любого фиксированного N имеет $N(N+1)/2$ степенных моментов. Значит, набор всех стоксовых постоянных C_{nm}, S_{nm} планеты до N-го порядка доставляет все степенные моменты функции $\mu(\xi, \eta)$ до этого порядка. Поэтому приближенное значение плотности *МД* можно найти теперь из решения двухмерной степенной проблемы моментов. Плотность *ДД* — функция $\nu=\nu(\xi, \eta)$ — получается аналогично.

Определение плотностей *МД* и *ДД* может быть выполнено также численно, что по сути дела, приводит к многоточечным моделям потенциала планеты. Такой подход к построению последних выгоден вследствие того, что, во-первых, число параметров, определяющих каждую точечную массу, уменьшено на единицу (не четыре, а три, так как точечные массы находятся в плоскости экватора), и, во-вторых, система уравнений, из которых определяются параметры точечных масс, разбивается естественно на три независимых системы: одна соответствует нечетной части потенциала (строится *ДД*); вторая — его четной части при четных n и m (строится диск S_0); третья — четной части $V_{чет}$ при нечетных n и m (определяется оставшаяся часть *МД*); важно, что построение диска S_0 выполняется даже независимо по геодезической и геофизической информации об общепланетарном эллипсоиде (его размерах и распределении плотности).

Список литературы: 1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие транцендентные функции. — М.: Наука, 1965. 2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. *Мещеряков Г. А.* О наименьшей квадратической аппроксимации геопотенциала. — В кн.: Наблюдения ИСЗ. София: БАН, 1982, т. 20. 4. *Мещеряков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов двух простых слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39. 5. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. — М.; Л.; ОГИЗ ГИТТЛ, 1946.

Статья поступила в редколлегию 09. 03. 83