УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ТЕОРИИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Теория двухгруппового уравнивания коррелированных величин основана на вероятностном подходе преобразования вектора невязок в некоррелированные подвекторы *. Ниже дано изложение теории двухгруппового уравнивания коррелированных величин в двух вариантах. В основу положен классический подход, связанный с преобразованием коэффициентов условных уравнений второй группы. Приведен простейший пример уравнивания геодезической сети.

---

* *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. – М.: Недра, 1979.

1. Напишем условные уравнения, разделив их на две группы:

$$aV+w_a=0, \tag{1}$$

$$\alpha V+w_\alpha=0, \tag{2}$$

$$a=\begin{vmatrix} a_1\, a_2 \cdots a_n \\ b_1\, b_2 \cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_1\, s_2 \cdots s_n \end{vmatrix}; \quad V=\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{vmatrix}; \quad w_a=\begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_s \end{vmatrix};$$

$$\alpha=\begin{vmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tau_1\, \tau_2 \cdots \tau_n \end{vmatrix}; \quad w_\alpha=\begin{vmatrix} w_{s+1} \\ w_{s+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{s+\tau} \end{vmatrix}.$$

Допустим, что измеряемые величины не имеют больших систематических ошибок, подчиняются нормальному закону распределения, коррелированы и корреляционная матрица измерений известна

$$\sigma^2\begin{pmatrix} Q_{11}\, Q_{12} \cdots Q_{1n} \\ Q_{12}\, Q_{22} \cdots Q_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{1n}\, Q_{2n} \cdots Q_{nn} \end{pmatrix}=\sigma^2 Q.$$

Решая (1), применив предписание обобщенного метода наименьших квадратов

$$V^{\mathrm{т}}Q^{-1}V=\min, \tag{3}$$

легко найти первичные поправки (т — знак транспонирования матриц)

$$V'=-Qa^{\mathrm{т}}(aQa^{\mathrm{т}})^{-1}w_a. \tag{4}$$

Прежде чем решать (2), надо сначала их преобразовать, учитывая уравнения первой группы. Для этого исправим свободные члены уравнений (2) первичными поправками, зная, что

$$V=V'+V''. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), найдем

$$\alpha V''+\alpha V'+w_\alpha=0. \tag{6}$$

Следовательно, преобразованные свободные члены уравнений второй группы, учитывая (4), должны вычисляться по формуле

$$W_\alpha=w_\alpha+\alpha V'=w_\alpha-\alpha Qa^{\mathrm{т}}(aQa^{\mathrm{т}})^{-1}w_a, \tag{7}$$

где выражение

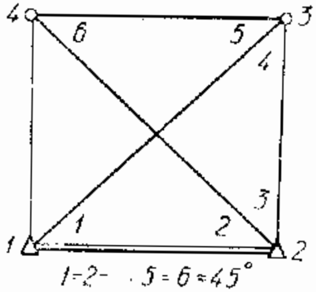
$$-\alpha Qa^{\mathrm{т}}(aQa^{\mathrm{т}})^{-1} \tag{8}$$

следует рассматривать как оператор, при помощи которого необходимо изменять коэффициенты условных уравнений второй группы. По аналогии с (7) напишем формулу для преобразования коэффициентов при поправках V'' в (6)

$$A=\alpha-\alpha Q a^{\tau}(aQa^{\tau})^{-1}a. \tag{9}$$

Таким образом, условные уравнения второй группы после их изменения с учетом уравнений первой группы имеют вид:

$$AV''+W_{\alpha}=0, \tag{10}$$



Сеть триангуляции.

где матрицы A и W_{α} вычисляются по формулам (7) и (9). Решая (10) по методу наименьших квадратов с применением предписания (3), найдем вторичные поправки

$$V''=-QA^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}W_{\alpha}. \tag{11}$$

Пусть в сети триангуляции (рисунок) измеряются с одинаковой точностью направления. Смежные углы на пунктах 2 и 3 сети коррелированы, так как имеют общие направления. Нетрудно показать теоретически, что коэффициент корреляции равняется —0,5, а корреляционная матрица для углов имеет вид:

$$\sigma^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\sigma^2 Q. \tag{12}$$

В данной сети возникает 2 условных уравнения фигур. Разделив их на две группы, матрицы коэффициентов примем такими:

$$a=(111100); \quad \alpha=(001111). \tag{13}$$

Приводим необходимые вычисления

$$aQ=\frac{1}{2}(2112-10); \quad aQa^{\tau}=3; \quad (aQa^{\tau})^{-1}=\frac{1}{3};$$

$$aQa^{\text{т}}=1;\ V'=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}w_a;\quad \alpha Qa^{\text{т}}=1;$$

$$A=\frac{1}{3}(-1-12233);\ AQA^{\text{т}}=\frac{8}{3};$$

$$(AQA^{\text{т}})^{-1}=\frac{3}{8};\quad AQ=\frac{1}{3}(-1-2\,2{,}5\,0{,}5\,2\,3)$$

$$QA^{\text{т}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2{,}5\\0{,}5\\2\\3\end{pmatrix};\quad V''=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2{,}5\\0{,}5\\2\\3\end{pmatrix}\left(w_\alpha-\frac{1}{3}w_a\right).$$

2. Изложим второй вариант преобразования условных уравнений (2). Для этого введем матрицу неопределенных множителей, с помощью которых преобразуются уравнения второй группы

$$\begin{pmatrix}\rho_{11}\rho_{12}\cdots\rho_{1s}\\ \rho_{21}\rho_{22}\cdots\rho_{2s}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \rho_{r1}\rho_{r2}\cdots\rho_{rs}\end{pmatrix}=R. \tag{14}$$

Подставляя (5) в (1), получим условие, из которого найдем матрицу R

$$aV'+aV''+w_a=0,$$
$$aV''=aQA^{\text{т}}K=0,$$
$$aQA^{\text{т}}=aQ(\alpha^{\text{т}}+a^{\text{т}}R^{\text{т}})=0,$$
$$\alpha Qa^{\text{т}}+RaQa^{\text{т}}=0,$$
$$R=-\alpha Qa^{\text{т}}(aQa^{\text{т}})^{-1}. \tag{15}$$

Написанные равенства очевидны. Формула (15) раскрывает смысл оператора (8) преобразования условных уравнений второй группы. Таким образом, решив (1) по формуле (4), вычислим первичные поправки. Затем по (15) вычисляем элементы матрицы R. Далее преобразуем коэффиценты условных уравнений второй группы по формуле

$$A=\alpha+Ra \tag{16}$$

и вычисляем, пользуясь (11), вторичные поправки. Из сравнения формул (16) и (9) видим, что рассмотренные два подхода к изложению теории двухгруппового уравнивания коррелированных измерений приводят к одним и тем же результатам и совпадают с окончательными формулами, предложенными Большаковым и Маркузе.

Статья поступила в редколлегию 11. 04. 83