набор всех стоксовых постоянных C_{nm}, S_{nm} планеты до N-го порядка доставляет все степенные моменты функции $\mu(\xi, \eta)$ до этого порядка. Поэтому приближенное значение плотности *МД* можно найти теперь из решения двухмерной степенной проблемы моментов. Плотность *ДД* — функция $\nu=\nu(\xi, \eta)$ — получается аналогично.

Определение плотностей *МД* и *ДД* может быть выполнено также численно, что по сути дела, приводит к многоточечным моделям потенциала планеты. Такой подход к построению последних выгоден вследствие того, что, во-первых, число параметров, определяющих каждую точечную массу, уменьшено на единицу (не четыре, а три, так как точечные массы находятся в плоскости экватора), и, во-вторых, система уравнений, из которых определяются параметры точечных масс, разбивается естественно на три независимых системы: одна соответствует нечетной части потенциала (строится *ДД*); вторая — его четной части при четных n и m (строится диск S_0); третья — четной части $V_{\text{чет}}$ при нечетных n и m (определяется оставшаяся часть *МД*); важно, что построение диска S_0 выполняется даже независимо по геодезической и геофизической информации об общепланетарном эллипсоиде (его размерах и распределении плотности).

Список литературы: 1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие транцендентные функции. — М.: Наука, 1965. 2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. 3. *Мещеряков Г. А.* О наименьшей квадратической аппроксимации геопотенциала. — В кн.: Наблюдения ИСЗ. София: БАН, 1982, т. 20. 4. *Мещеряков Г. А.* О представлении потенциала планеты суммой потенциалов двух простых слоев. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39. 5. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. — М.; Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1946.

Статья поступила в редколлегию 09. 03. 83

УДК 528.14/16

И. Ф. МОНИН

К ТЕОРИИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНИВАНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Теория двухгруппового уравнивания коррелированных величин основана на вероятностном подходе преобразования вектора невязок в некоррелированные подвекторы *. Ниже дано изложение теории двухгруппового уравнивания коррелированных величин в двух вариантах. В основу положен классический подход, связанный с преобразованием коэффициентов условных уравнений второй группы. Приведен простейший пример уравнивания геодезической сети.

---

* *Большаков В. Д., Маркузе Ю. И.* Городская полигонометрия. — М.: Недра, 1979.

1. Напишем условные уравнения, разделив их на две группы:

$$aV+w_a=0, \tag{1}$$

$$\alpha V+w_\alpha=0, \tag{2}$$

$$a=\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \cdots a_n \\ b_1\, b_2 \cdots b_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_1\, s_2 \cdots s_n \end{pmatrix};\quad V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix};\quad w_a=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_s \end{pmatrix};$$

$$\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tau_1\, \tau_2 \cdots \tau_n \end{pmatrix};\quad w_\alpha=\begin{pmatrix} w_{s+1} \\ w_{s+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{s+\tau} \end{pmatrix}.$$

Допустим, что измеряемые величины не имеют больших систематических ошибок, подчиняются нормальному закону распределения, коррелированы и корреляционная матрица измерений известна

$$\sigma^2\begin{pmatrix} Q_{11}\, Q_{12} \cdots Q_{1n} \\ Q_{12}\, Q_{22} \cdots Q_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{1n}\, Q_{2n} \cdots Q_{nn} \end{pmatrix}=\sigma^2 Q.$$

Решая (1), применив предписание обобщенного метода наименьших квадратов

$$V^{\mathsf{T}}Q^{-1}V=\min, \tag{3}$$

легко найти первичные поправки (T — знак транспонирования матриц)

$$V'=-Qa^{\mathsf{T}}(aQa^{\mathsf{T}})^{-1}w_a. \tag{4}$$

Прежде чем решать (2), надо сначала их преобразовать, учитывая уравнения первой группы. Для этого исправим свободные члены уравнений (2) первичными поправками, зная, что

$$V=V'+V''. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), найдем

$$\alpha V''+\alpha V'+w_\alpha=0. \tag{6}$$

Следовательно, преобразованные свободные члены уравнений второй группы, учитывая (4), должны вычисляться по формуле

$$W_\alpha=w_\alpha+\alpha V'=w_\alpha-\alpha Qa^{\mathsf{T}}(aQa^{\mathsf{T}})^{-1}w_a, \tag{7}$$

где выражение

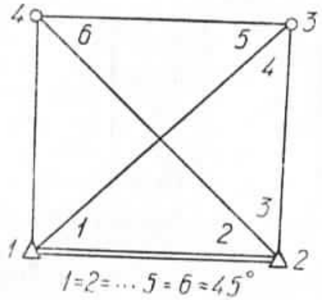
$$-\alpha Qa^{\mathsf{T}}(aQa^{\mathsf{T}})^{-1} \tag{8}$$

следует рассматривать как оператор, при помощи которого необходимо изменять коэффициенты условных уравнений второй группы. По аналогии с (7) напишем формулу для преобразования коэффициентов при поправках V'' в (6)

$$A=\alpha-aQa^{\text{т}}(aQa^{\text{т}})^{-1}a. \qquad (9)$$

Таким образом, условные уравнения второй группы после их изменения с учетом уравнений первой группы имеют вид:

$$AV''+W_{\alpha}=0, \qquad (10)$$



Сеть триангуляции.

где матрицы A и W_{α} вычисляются по формулам (7) и (9). Решая (10) по методу наименьших квадратов с применением предписания (3), найдем вторичные поправки

$$V''=-QA^{\text{т}}(AQA^{\text{т}})^{-1}W_{\alpha}. \qquad (11)$$

Пусть в сети триангуляции (рисунок) измеряются с одинаковой точностью направления. Смежные углы на пунктах 2 и 3 сети коррелированы, так как имеют общие направления. Нетрудно показать теоретически, что коэффициент корреляции равняется —0,5, а корреляционная матрица для углов имеет вид:

$$\sigma^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\sigma^2 Q. \qquad (12)$$

В данной сети возникает 2 условных уравнения фигур. Разделив их на две группы, матрицы коэффициентов примем такими:

$$a=(111100); \quad \alpha=(001111). \qquad (13)$$

Приводим необходимые вычисления

$$aQ=\frac{1}{2}(2112-10); \quad aQa^{\text{т}}=3; \quad (aQa^{\text{т}})^{-1}=\frac{1}{3};$$

$$aQ\alpha^{\text{т}}=1; \; V'=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} w_a; \quad \alpha Qa^{\text{т}}=1;$$

$$A=\frac{1}{3}(-1-12233); AQA^{\text{т}}=\frac{8}{3};$$

$$(AQA^{\text{т}})^{-1}=\frac{3}{8}; \quad AQ=\frac{1}{3}(-1-2\,2{,}5\,0{,}5\,2\,3)$$

$$QA^{\text{т}}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}; \quad V''=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}\left(w_{\alpha}-\frac{1}{3}w_a\right).$$

2. Изложим второй вариант преобразования условных уравнений (2). Для этого введем матрицу неопределенных множителей, с помощью которых преобразуются уравнения второй группы

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}\rho_{12}\cdots\rho_{1s} \\ \rho_{21}\rho_{22}\cdots\rho_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho_{r1}\rho_{r2}\cdots\rho_{rs} \end{pmatrix}=R. \qquad (14)$$

Подставляя (5) в (1), получим условие, из которого найдем матрицу R

$$aV'+aV''+w_a=0,$$
$$aV''=aQA^{\text{т}}K=0,$$
$$aQA^{\text{т}}=aQ(\alpha^{\text{т}}+a^{\text{т}}R^{\text{т}})=0,$$
$$aQ\alpha^{\text{т}}+RaQa^{\text{т}}=0,$$
$$R=-\alpha Qa^{\text{т}}(aQa^{\text{т}})^{-1}. \qquad (15)$$

Написанные равенства очевидны. Формула (15) раскрывает смысл оператора (8) преобразования условных уравнений второй группы. Таким образом, решив (1) по формуле (4), вычислим первичные поправки. Затем по (15) вычисляем элементы матрицы R. Далее преобразуем коэффициенты условных уравнений второй группы по формуле

$$A=\alpha+Ra \qquad (16)$$

и вычисляем, пользуясь (11), вторичные поправки. Из сравнения формул (16) и (9) видим, что рассмотренные два подхода к изложению теории двухгруппового уравнивания коррелированных измерений приводят к одним и тем же результатам и совпадают с окончательными формулами, предложенными Большаковым и Маркузе.

Статья поступила в редколлегию 11. 04. 83

УДК 528.024.01

Л. Н. ПЕРОВИЧ, М. Ф. ЛИСЕВИЧ, В. М. МАРКИВ

О ТОЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В ГАЗОТУРБИННЫХ ЦЕХАХ

На трассах газопроводов страны функционирует большое количество газокомпрессорных станций (ГКС). Для получения всесторонней информации о состоянии ГКС в процессе эксплуатации проводят специальные геодезического наблюдения, осуществляя их на разных уровнях.

Например, наблюдения за осадками инженерно-строительных конструкций и фундаментов зданий выполняют в нижнем слое воздуха, наблюдения за деформациями подкрановых путей — в верхнем, а наблюдения за деформациями осей газоперекачивающих агрегатов (ГПА) целесообразно вести на уровне их расположения.

Актуальным следует считать исследования вопросов повышения точности определения осадок ГПА. Они должны быть определены с наивысшей достижимой точностью.

Исследования стратификации температурного поля одного из типовых газотурбинных цехов компрессорной станции газопровода «Братство» показали, что различие температур в разных точках цеха в один физический момент времени достигает 30 и более градусов.

Распределение температурного поля по высоте в разных частях цеха неоднородно, что приводит к неодинаковому влиянию температурных различий на результаты геодезических измерений.

На основании выполненных нами исследований было установлено, что вдоль линии нивелирования вертикальный градиент показателя преломления воздуха подчиняется зависимости

$$\mathrm{grad}_{\text{в}}\, n_i = A\,(aD_i^2 + bD_i + c). \qquad (1)$$

Искривление светового луча, вызванное вертикальной рефракцией, можно представить выражением

$$\Delta b = \mathrm{grad}_{\text{в}}\, n_{\text{ср}} \frac{d^2}{2}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathrm{grad}_{\text{в}}\, n_i$ — вертикальный градиент показателя преломления в i точке, расположенной на расстоянии D_i от края цеха; $\mathrm{grad}_{\text{в}}\, n_{\text{ср}}$ — вертикальный градиент показателя преломления в средней точке интервала d между нивелиром и рейкой; $A = \frac{n_i - 1}{t_i + 273}$ — величина, определяемая по показателю n_i и температуре t_i воздуха; a, b, c — параметры функции (1), которые соответственно равны:

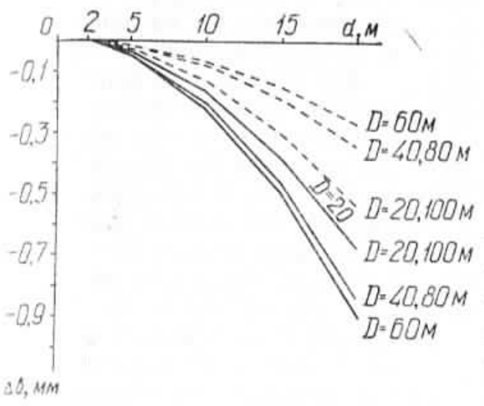


Рис. 1. Графики величин Δb, мм: ——— нижний слой; — — — — верхний слой.

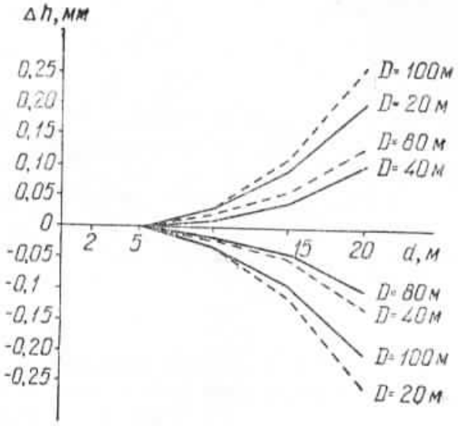


Рис. 2. Графики ошибок Δh, мм: ——— нижний слой; — — — — верхний слой.

для нижнего слоя (1,3 ... 5,7 м) —0,0008, +0,0960, +2,6;
для верхнего слоя (5,7 ... 9,4 м) +0,0010, —0,1200, +5,3.

На рис. 1 представлены значения Δb для нижнего и верхнего слоев в зависимости от удаления D средней точки луча «нивелир-рейка» от края цеха.

В нижнем слое воздуха (1,3 ... 5,7 м) Δb может достигать значений (—0,7)—(—0,9) мм, в верхнем слое (5,7 ... 9,4 м) — (—0,2)—(—0,5) мм.

При отсчитывании задней и передней реек происходит некоторая компенсация указанных ошибок. Однако вследствие неодинакового распределения показателя преломления вдоль линии нивелирования некоторое влияние вертикальной рефракции остается.

Используя (1) и (2), нетрудно показать, что при соблюдении равенства плеч, ошибку в превышении можно подсчитать по формуле

$$\Delta h = -\frac{A}{2} d^3 (2aD_{\text{ср}} + b), \qquad (3)$$

где $D_{\text{ср.}}$ — удаление нивелира от края цеха.

Значения ошибок Δh приведены на рис. 2.