УДК 525.12

М. М. ФЫС

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЛИПСОИДА

Ранее в [1, 2] были рассмотрены некоторые свойства биортогональных рядов W_{mnk}, Ω_{mnk} внутри эллипсоида Э, в частности, показана возможность разложения функции по этим рядам

$$f = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} b_{mnk} W_{mnk}, \tag{1}$$

или

$$f = \sum_{m+n+k=0}^{\infty} c_{mnk} \Omega_{mnk}, \tag{2}$$

где

$$b_{mnk} = \frac{\int\limits_{Э} f \Omega_{mnk}\, d\tau}{\int\limits_{Э} \Omega_{mnk} W_{mnk}\, d\tau}, \tag{3}$$

$$c_{mnk} = \frac{\int\limits_{Э} W_{mnk}\, d\tau}{\int\limits_{Э} \Omega_{mnk} W_{mnk}\, d\tau}, \tag{4}$$

причем

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{Э} \left[f - \sum_{m+n+k=0}^{N} b_{mnk} W_{mnk} \right]^2 d\tau = 0; \tag{5}$$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{Э} \left[f - \sum_{m+n+k=0}^{N} c_{mnk} \Omega_{mnk} \right]^2 d\tau = 0, \tag{6}$$

т. е. для рядов (1), (2) имеет место сходимость в среднем.

Рассмотрим потенциал эллипсоида

$$V(Q)=\int\limits_{Э}\frac{\delta(P)}{r(Q,P)}\,d\tau,\ P\subset Э,\ Q\in R^3, \tag{7}$$

где δ — распределение плотности масс в $Э$; r — расстояние точки Q от P, и учитываем возможность представления δ в виде ряда (1,) а $1/r$ в виде (2), где коэффициенты в виде (4) зависят от точки Q.

Так как оба разложения функций δ и $\frac{1}{r}$ сходятся в среднем, а $\int\limits_{Э}\frac{d\tau}{r^2(Q,P)}$ ограничен по Q, то, используя неравенство Буняковского–Коши и указанные выше свойства, можно установить, что ряд, полученный подстановкой (1), (2) в (7),

$$\sum_{m+n+k=0}^{\infty} c_{mnk}(Q)\,b_{mnk}\int\limits_{Э}\Omega_{mnk}W_{mnk}\,d\tau, \tag{8}$$

является равномерно сходящимся по точке Q и представляет непрерывную функцию $V(Q)$.

Таким образом, считая известными b_{mnk} — коэффициенты разложения плотности внутри эллипсоида — можно вычислить и значение потенциала как внутри, так и вне его. Значение внешнего потенциала Земли, трактуемой как неоднородный эллипсоид, в случае учета ее стоксовых постоянных до N-го порядка будет совпадать с разложением геопотенциала, представляемого суммой шаровых функций до N-го порядка.

Результаты расчета внутреннего потенциала по (8) представит его модельное значение, соответствующее, однако, внешнему потенциалу, учитывающему гармоники до N-го порядка.

Для иллюстрации возможности определения модельного значения внутреннего потенциала найдем значение его в центре эллипсоида, используя при этом модель плотности и исходные данные [3]. Результаты вычислений показывают, что учет только первого члена разложения (8) даст

$$V_0(0)=86252070\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Удержание в (8) членов до второго порядка дает его уточненное значение

$$V_0(0)=86247108\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Вследствие малости коэффициентов высших порядков b_{mnk} и $c_{mnk}(Q)\int\limits_{Э}\Omega_{mnk}W_{mnk}\,d\tau$ всеми остальными членами (8) можно пренебречь. Поэтому для данной модели можно считать, что значение потенциала в центре эллипсоида

$$V(0)=86247168\ \text{м}^2/\text{с}^2.$$

Последнее соответствует оценкам, данным в [4].

Список литературы: 1. *Мещеряков Г. А., Фыс М. М.* О биортогональных системах внутри эллипсоида. — В кн.: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. М., 1981. 2. *Мещеряков Г. А., Фыс М. М.* О представлении плотности земных недр рядами по биортогональным системам многочленов. — В кн.: Теория и методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Киев, 1981. 3. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр. — Геофизический сборник АН УССР, 1978, вып. 86. 4. *Мещеряков Г. А.* Об оценке некоторых величин, характеризующих внутреннее гравитационное поле Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1973, вып. 17.

Статья поступила в редколлегию 20. 05. 83