

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВКИ ЗА ВЕРТИКАЛЬНУЮ РЕФРАКЦИЮ ПОСРЕДСТВОМ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ КРИВОЙ

При выполнении геодезических измерений для более строгого учета и введения поправок за вертикальную рефракцию расчетным методом необходимо подобрать уравнение, которое бы математически наиболее правдоподобно описывало рефракционную кривую светового луча.

Такое уравнение можно получить, решая функционал [2]

$$I = \int n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

Здесь $n(x, y)$ — показатель преломления как функция от x, y ; y' — первая производная рефракционной кривой по x .

Для решения (1) используем дифференциальное уравнение второго порядка Эйлера [1]

$$F'_y - F''_{xy'} - F''_{yy'} y' - F''_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (2)$$

Раскроем производные в (2) и запишем их в виде

$$F'_y = \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2}; \quad (3) \quad F''_{xy'} = \frac{\partial n}{\partial x} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad (4)$$

$$F''_{yy'} = \frac{\partial n}{\partial y} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad (5) \quad F''_{y'y'} = \frac{n}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}. \quad (6)$$

Обозначив $\partial n / \partial x = q$, $\partial n / \partial y = p$ и подставив (3) — (6) в (2), получим

$$p \sqrt{1 + y'^2} - \frac{qy'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{py'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{ny''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = 0, \quad (6')$$

или после несложных преобразований будем иметь

$$ny'' + qy' - py'^2 + qy'^3 = p. \quad (7)$$

Решение (7) связано с математическими трудностями, но задачу можно упростить, если учесть геометрию оптического луча в пространстве.

Известно, что

$$y' = \operatorname{tg} \delta, \quad (8)$$

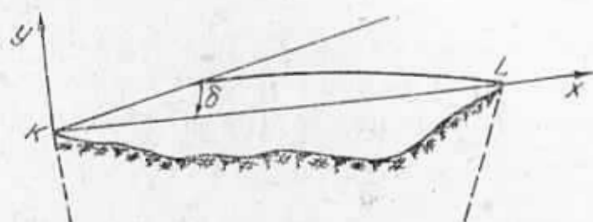
где δ — угол между касательной к кривой и направлением визирного луча.

Если на рисунке за ось x принять направление линии визирования KL , а за ось y — линию, перпендикулярную оси x в точке

K , которую считаем началом данной системы координат, то δ будет поправкой за вертикальную рефракцию.

Положим, что $\delta_{\max} = 10'$, тогда $y' = 0,003$. Соответственно получим $y'' = 3 \cdot 10^{-7}$ и $y''' = 3 \cdot 10^{-10}$. Эти два члена вследствие их малости можно приравнять нулю, а (7) записать в упрощенном виде

$$ny'' + qy' = p. \quad (9)$$



Траектория светового луча.

Для решения (9) используем полином вида

$$y = \sum_{i=0}^m a_i x^i. \quad (10)$$

Вычислив из (10) первую и вторую производные и подставив их в (9), получим

$$n \sum_{i=0}^m i(i-1) a_i x^{i-2} + q \sum_{i=0}^m i a_i x^{i-1} = p. \quad (11)$$

Группируя члены (11) по степеням неизвестного x , запишем

$$\sum_{i=0}^m [i(i+1) a_{i+1} n + i a_i q] x^{i-1} = P. \quad (12)$$

Приравнявая коэффициенты при неизвестных левой и правой частях уравнения (12), получаем систему уравнений с коэффициентами $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i$:

$$\begin{aligned} 2na_2 + qa_1 &= p, \\ 2 \cdot 3na_3 + 2qa_2 &= p, \\ \dots & \\ i(i+1)na_{i+1} + iqa_i &= p. \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему (13), найдем значения всех коэффициентов через a_1 :

$$a_2 = \frac{p - qa_1}{2n},$$

$$a_3 = \frac{q(p - qa_1)}{2 \cdot 3n^2},$$

.....

$$a_i = (-1)^i \frac{q^{i-2} (p - qa_1)}{i! n^{i-1}}. \quad (14)$$

С учетом (14) уравнение (10) перепишем в виде

$$y = \sum_{i=2}^m (-1)^i \frac{q^{i-2} (p - qa_1)}{i! n^{i-1}} + a_0 + a_1 x. \quad (15)$$

Принимая во внимание условие, что рефракционная кривая проходит через точку наблюдения и точку визирования, расстояние между которыми l , уравнение (9) и (15) будем решать при граничных условиях:

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow y=0, \\ x=l &\rightarrow y=0. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая (15) и (16), находим системы уравнений для вычисления коэффициентов a_0 и a_1 :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 l + \sum_{i=2}^m (-1)^i \frac{q^{i-2} (p - qa_1)}{i! n^{i-1}} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Группируя по a_1 и сокращая на l , второе уравнение системы (17) перепишем в виде

$$a_1 \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} l^{i-1}}{i! n^{i-1}} + p \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} l^i}{(i+1)! n^i} = 0. \quad (18)$$

Откуда

$$a_1 = - \frac{p \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} \cdot l^i}{(i+1)! n^i}}{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{q^{i-1} \cdot l^{i-1}}{i! n^{i-1}}}. \quad (19)$$

Сделав соответствующие преобразования, получим окончательное выражение для вычисления

$$a_1 = - \frac{pl}{2n} \left(1 + \frac{ql}{6n} - \frac{q^3 l^3}{360n^3} - \frac{q^5 l^5}{45360n^5} - \dots \right). \quad (20)$$

Для вычисления остальных неизвестных коэффициентов a_i выражение в круглых скобках уравнения (20) обозначим через A . Тогда

$$a_i = (-1)^i \left[\frac{pq^{i-2}}{i! n^{i-1}} - \frac{pq^{i-1} l}{2n^i i!} \cdot A \right]. \quad (21)$$

С учетом (20) и (21) уравнение (15) перепишем в виде

$$y = \sum_{i=1}^m (-1)^i p \left(\frac{q^{i-2}}{i! n^{i-1}} \frac{q^{i-1} l}{2i! n^i} \cdot A \right) x_i, \quad (22)$$

Для оценки полученного решения и сохранения необходимого числа членов ряда примем $n=1$, $q_{\max} \simeq p_{\max} \simeq 10^{-7}$ 1/М, $l_{\max} = 3 \times 10^4$ м.

С учетом принятых значений, умножая второе слагаемое в круглой скобке (22) на A , при $i=1$ находим, что третий член ряда

$$\frac{x p q^3 l^4}{2 \cdot 360 n^4} = \frac{243 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{20}}{720} = 0,3 \cdot 10^{-8};$$

при $i=2$ второй член ряда

$$\frac{x^2 p q^2 l^2}{24 n^3} = \frac{10^{-21} \cdot 81 \cdot 10^{16}}{24} = 3,4 \cdot 10^{-5};$$

при $i=3$ первый член ряда

$$\frac{x^3 p q^2 l}{12 n^3} = \frac{10^{-21} \cdot 81 \cdot 10^{16}}{12} = 6,7 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда с точностью до $6,7 \cdot 10^{-5}$ формулу (22) можно записать в следующем виде:

$$y = -\frac{pl}{2} \left(1 + \frac{ql}{6} \right) x + \frac{p}{2} \left(1 + \frac{q^2 l^2}{12} \right) x^2 - \left[\frac{pq}{6} \left(1 + \frac{ql}{2} \right) \right] x^3. \quad (23)$$

Уравнение (23) описывает рефракционную кривую оптического луча, распространяющегося в реальной атмосфере между точками, отстоящими друг от друга на расстояние l .

В нем градиенты p и q в общем случае рассматриваются как функции от x и y . В частных случаях они могут быть постоянными или равными нулю.

С учетом сказанного, производная уравнения (23) будет иметь вид

$$y' = - \left[\frac{pl}{2} \left(1 + \frac{ql}{6} \right) \right]' x - \left[\frac{pl}{2} \left(1 + \frac{ql}{6} \right) \right] + \left[\frac{p}{2} \left(1 + \frac{q^2 l^2}{12} \right) \right]' x^2 + \\ + 2 \left[\frac{p}{2} \left(1 + \frac{q^2 l^2}{12} \right) \right] x - \left[\frac{pq}{6} \left(1 + \frac{ql}{2} \right) \right]' x^3 - 3 \left[\frac{pq}{6} \left(1 + \frac{ql}{2} \right) \right] x^2. \quad (24)$$

Для определения поправки за рефракцию предложенным методом необходимо вычислить значение (24) в точке наблюдения, учитывая при этом зависимость (8):

$$\delta'' = - \frac{\rho'' p_0 l}{2} \left(1 + \frac{q_0 l}{6} \right), \quad (25)$$

где p_0, q_0 — градиенты показателя преломления в точке наблюдения ($x=0, y=0$).

Как видно из полученной формулы (25), поправка за вертикальную рефракцию зависит от длины визирного луча l , вертикального p и горизонтального q градиентов показателя преломления, вычисленных только в точке наблюдения.

Список литературы: 1. Зельнович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967. 2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974, т. 4.

Статья поступила в редколлегию 27.03.84