

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИБОРОВ ТИПА «ПОДЕРОГРАФ»

Одним из критериев точности конкретного пункта геодезической сети является подера эллипса ошибок, наиболее полно характеризующая точность положения точки на плоскости. Однако сложность построения подер сдерживает их широкое применение на практике.

На кафедре инженерной геодезии Горьковского инженерно-строительного института им. В. П. Чкалова разработана серия приборов, позволяющих механизировать процесс геометрических построений подеры. Они объединены под общим названием «Подерографы». Рассмотрим теоретические основы, включающие краткий кинематический анализ и методику использования двух таких приборов [2, 4], предназначенных для оценки точности маркшейдерско-геодезических построений.

Отличительная особенность рассматриваемых приборов — наличие двух шарнирных параллелограммов  $ABCD$  и  $LMNK$ , шатуны которых  $BC$  и  $MN$  взаимно перпендикулярны (рис. 1, 2). Кривошины параллелограммов  $AB$ ,  $DC$  и  $LM$ ,  $KN$  закреплены шарнирно в точках  $A$ ,  $D$  и  $L$ ,  $K$  на неподвижном основании. В центре основания в точке  $O$  установлена ось вращения ведущего звена прибора, снабженного фиксаторами 1 и 2, которые помещены в прорези шатунов  $BC$  и  $MN$ . При вращении ведущего звена при-

бора шатуны под действием фиксаторов перемещаются параллельно самим себе, а точка пересечения шатунов  $h$  описывает вокруг точки  $O$  некоторую кривую. Проведем кинематический анализ подерографов, выбрав в качестве тела отсчета их неподвижное основание и связанную с ним систему отсчета в виде двух взаимно перпендикулярных осей  $X'$  и  $Y'$ .

На рис. 1 показана схема прибора, предназначенного для построения эллипса и его подеры по предварительно вычисленным значениям  $A_0$  и  $B_0$  [2].

В этом приборе в качестве ведущего звена служит градуированный базис  $ab$ . Методика работы с прибором заключается в следующем. На закрепленном листе бумаги отмечается положение осей  $X'$  и  $Y'$ . Установив фиксаторы 1 и 2 на расстояниях от центра  $O$ , равных соответственно  $A_0$  и  $B_0$ , поворачивают базис  $ab$  на некоторый угол  $\theta$ , отмечают на чертеже точку  $h$  пересечения шатунов и переносят расстояние  $O$  на направление базиса в обе стороны от центра, получая две симметричные точки  $e$  и  $f$ . Таким образом, поворачивая базис, производят набор точек с желаемой густотой. Соединив эти точки между собой, вычерчивают кривые.

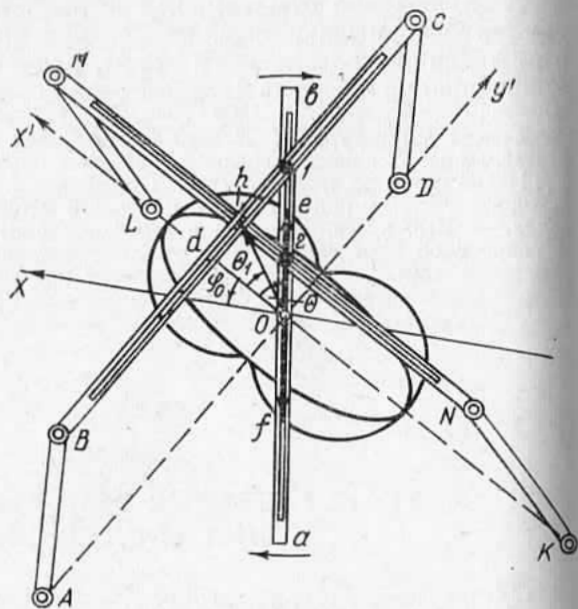


Рис. 1. Схема прибора для построения эллипса и подеры по известным  $A_0$  и  $B_0$ .

Определение траекторий точек  $h$  и  $e$  (или  $f$ ) графическим методом показало, что точка пересечения шатунов  $h$  описывает эллипс, а точка  $e$  (или  $f$ ) — подеру. Полуоси обеих кривых равны  $A_0$  и  $B_0$  и совпадают с направлением осей  $X'$  и  $Y'$ . Это подтверждается аналитическими расчетами. Действительно, в условной системе  $X'OY'$  прямоугольные координаты точки  $h$  равны соответственно  $X' = Od = A_0 \cos \theta$ ,  $Y' = dh = B_0 \sin \theta$ . Следовательно, траектория точки  $h$  эллипс, так как  $X'$  и  $Y'$  удовлетворяют общеизвестному уравнению эллипса, заданному координатным способом. В свою очередь, радиус-вектор  $Oe = Oh = \rho$  можно найти из выражения

$$\rho^2 = A_0^2 \cos^2 \theta + B_0^2 \sin^2 \theta, \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол между большой осью подеры и радиусом-вектором.

Уравнение (1) соответствует уравнению подеры эллипса, заданной векторным способом, следовательно, траекторией точки  $e$

(или  $f$ ) является годограф вектора  $\rho$ , или подера. Соотношение между углами  $\theta_1$  и  $\theta$  будет

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{B_0 \sin \theta}{A_0 \cos \theta} = \frac{B_0}{A_0} \operatorname{tg} \theta. \quad (2)$$

В том случае, когда базис  $ab$  располагается вдоль оси  $X'$ , углы  $\theta_1 = \theta = 0^\circ = 180^\circ$  и радиус-вектор равен  $A_0$ , а если базис  $ab$  располагается вдоль оси  $Y'$ , то  $\theta_1 = \theta = 90^\circ = 270^\circ$  и радиус-вектор равен  $B_0$ . Следовательно, направления большой оси подеры и эллипса (малой оси подеры и эллипса) совпадают. Эллипс имеет с подерой четыре общие точки, соответствующие экстремальным значениям радиуса-вектора  $\rho$ .

Если фиксатор  $1$  закреплен на расстоянии  $A_0$  от центра, а фиксатор  $2$  — на расстоянии  $B_0$ , то направление большой оси подеры и эллипса совпадает с направлением оси  $X'$ . Если фиксатор  $1$  закрепить на расстоянии  $B_0$ , а фиксатор  $2$  — на расстоянии  $A_0$ , то направление большой оси подеры и эллипса совпадает с направлением  $Y'$ . Для ориентировки подеры (эллипса) относительно координатных осей истинной системы  $XOY$  необходимо от направления большой оси подеры отложить против хода часовой стрелки дирекционный угол  $\varphi_0$  большой оси и провести ось  $X$ . Если оба фиксатора закреплены на одинаковом расстоянии от центра, т. е.  $A_0 = B_0$ , тогда при любой ориентировке базиса имеем  $\theta_1 = \theta$ , а подера и эллипс трансформируются в окружность радиуса  $A_0$ , которую описывает точка пересечения шатунов.

На базе этого прибора разработана конструкция устройства, позволяющего по известным значениям  $A_0$  и  $B_0$  вычерчивать одновременно эллипс и его подеру при вращении базиса вокруг точки  $O$  [5].

На рис. 2 показана схема прибора, предназначенного для построения эллипса и подеры простой (однократной) засечки [4]. В этом приборе в качестве ведущего звена служат два градуированных базиса  $I$  и  $II$ , закрепленные на общей оси вращения  $O$ . Базис  $I$  двухплечий Т-образной формы, плечо  $ab$  перпендикулярно плечу  $I$ . Прибор позволяет вычерчивать кривые без предварительного вычисления элементов  $A_0$  и  $B_0$ . Для этого на приборе закрепляют лист бумаги, на котором отмечают положение осей  $X'$  и  $Y'$ . Устанавливают фиксаторы  $1$  и  $2$  на некоторых расстояниях от центра  $O$ , равных  $l_1$  и  $l_2$ , а базисы  $I$  и  $II$  закрепляют между собой так, чтобы угол между ними был  $90^\circ + \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между двумя направлениями засечки, а  $l_1$  и  $l_2$  характеризуют точность измерения этих направлений. Поворачивают ведущее звено на некоторый угол, отмечают на чертеже точку  $h$  пересечения шатунов и переносят радиус-вектор  $Oh$  на направление  $ab$  в обе стороны от центра  $O$ , получая две симметричные точки  $e$  и  $f$ . Так производят набор точек через определенный угловой интервал с желаемой густотой. Кривые вычерчивают, соединяя полученные точки.

Кинематический анализ, проведенный графическим методом и подтвержденный аналитическими расчетами, показал, что, как и

в предыдущем приборе, здесь точка пересечения шатунов  $h$  при вращении скрепленных между собой базисов  $I$  и  $II$  описывает эллипс, а пары точек, полученные аналогично точкам  $e$  и  $f$ , формируют подеру. Большая и малая полуоси эллипса равны аналогичным полуосям подеры, но в данном случае направления осей обеих кривых не совпадают. В системе отсчета  $X'OY'$  большая ось эллипса ориентирована относительно оси абсцисс под углом  $\varphi'$ , а большая ось подеры под углом  $\varphi_0'$ .

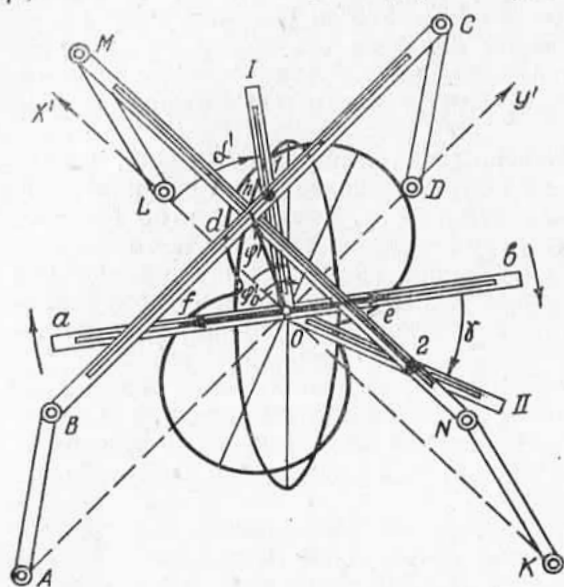


Рис. 2. Схема прибора для построения эллипса и подеры простой засечки.

Радиус-вектор меняется от некоторого минимального значения до максимального. Если  $\alpha' = \alpha_1$ ,  $l_1 = \frac{S_2 m_{\alpha_2}}{\rho'' \sin \gamma}$ ,  $l_2 = \frac{S_1 m_{\alpha_1}}{\rho'' \sin \gamma}$ , то (3) примет вид

$$m_x^2 = \frac{S_2^2 m_{\alpha_2}^2 \cos^2 \alpha_1 + S_1^2 m_{\alpha_1}^2 \cos^2 \alpha_2}{(\rho'')^2 \sin^2 \gamma}. \quad (4)$$

Здесь  $m_x$  — средняя квадратическая ошибка абсциссы  $X$  простой прямой угловой (или азимутальной) засечки, где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — дирекционные углы сторон засечки в истинной системе координат  $XOY$ , средняя квадратическая ошибка измерения которых соответственно  $m_{\alpha_1}$  и  $m_{\alpha_2}$ ;  $S_1$  и  $S_2$  — длины сторон засечки;  $\rho'' = 206265''$ .

Если  $\alpha' = \alpha_1$ ,  $l_1 = m_{S_2}$ ,  $l_2 = m_{S_1}$ , то (3) принимает вид

$$m_y^2 = \frac{m_{S_2}^2 \cos^2 \alpha_1 + m_{S_1}^2 \cos^2 \alpha_2}{\sin^2 \gamma}, \quad (5)$$

Покажем, что прибор (см. рис. 2) позволяет производить оценку точности угловых и линейных засечек. Пусть плечо  $I$  базиса составляет некоторый угол  $\alpha'$  с осью абсцисс системы отсчета. Тогда координаты точки  $h$  будут  $X' = Od = l_1 \times \cos \alpha'$  и  $Y' = dh = l_2 \times \cos(\alpha' + \gamma)$ , а радиус-вектор  $Oe = Oh = \rho$  составит

$$\rho^2 = l_1^2 \cos^2 \alpha' + l_2^2 \cos^2(\alpha' + \gamma). \quad (3)$$

При вращении базисов угол  $\alpha'$  может принимать любое значение в пределах от 0 до 360°, при этом радиус-вектор

где  $m_Y$  — средняя квадратическая ошибка ординаты  $Y$  простой линейной засечки, стороны которой измерены со средними квадратическими ошибками  $m_{S_1}$  и  $m_{S_2}$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — дирекционные углы сторон засечки в истинной системе координат  $XOY$ .

Таким образом, прибор (рис. 2) позволяет получать средние квадратические ошибки по осям координат, по любому другому направлению, в том числе по максимальной и минимальную ошибки простых угловых и линейных засечек.

Исследованиями на экстремум формулы (3) нетрудно установить, что ориентировку большой оси подеры относительно оси  $X'$  можно определить по одной из следующих формул:

$$\operatorname{tg} 2\varphi'_0 = -\frac{l_2^2 \sin 2\gamma}{l_1^2 + l_2^2 \cos 2\gamma} = -\frac{\sin 2\gamma}{K_1^2 + \cos 2\gamma} = -\frac{K_2^2 \sin 2\gamma}{1 + K_2^2 \cos 2\gamma}, \quad (6)$$

здесь и далее  $K_1 = \frac{l_1}{l_2}$ ,  $K_2 = \frac{l_2}{l_1}$ .

Ориентировку большой оси эллипса относительно оси  $X'$  можно найти по одной из формул

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \frac{l_2^2 - l_1^2 + \sqrt{l_1^4 + \sqrt{2}l_1^2 l_2^2 \cos 2\gamma + l_2^4}}{2l_1 l_2 \cos \gamma} = \\ &= \frac{1 - K_1^2 + \sqrt{K_1^4 + 2K_1^2 \cos 2\gamma + 1}}{2K_1 \cos \gamma} = \\ &= \frac{K_2^2 - 1 + \sqrt{1 + 2K_2^2 \cos 2\gamma + K_2^4}}{2K_2 \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ (6), (7) показывает, что при  $l_1 = l_2$ , т. е. при  $K_1 = K_2 = 1$ ,  $\varphi'_0 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$  и  $\varphi' = 45^\circ$ . При изменении угла засечки от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ ,

угол  $\varphi'$  изменяется от  $\operatorname{arctg} \frac{1}{K_1} = \operatorname{arctg} K_2$  до  $0^\circ$ , если  $K_1 > 1$  (при-

нимаемая значения меньше  $45^\circ$ ), или изменяется до  $90^\circ$ , если  $K_1 < 1$  (принимая значения больше  $45^\circ$ ). Иными словами, при  $\gamma = 90^\circ$  большая ось эллипса совпадает с направлением оси  $X'$ , если  $K_1 > 1$  ( $K_2 < 1$ ), или она совпадает с направлением  $Y'$ , если  $K_1 < 1$  ( $K_2 > 1$ ). В свою очередь, при колебаниях  $\gamma$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  угол  $\varphi'_0$  изменяется от  $90^\circ$  до  $45^\circ$  при  $K_1 = K_2 = 1$ , или он изменяется до  $0^\circ$

при  $K_1 < 1$  (принимая значения всегда меньше  $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ ), а при

$K_1 > 1$  он изменяется в пределах  $90^\circ$ , принимая промежуточные значения всегда больше  $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ . Следовательно, при  $\gamma = 90^\circ$  боль-

шая ось подеры совпадает с направлением оси  $X'$  при  $K_1 < 1$  ( $K_2 > 1$ ) и с направлением  $Y'$  при  $K_1 > 1$  ( $K_2 < 1$ ).

Если базисы I и II закреплены так, что угол  $\gamma=90^\circ$ , а фиксаторы 1 и 2 установлены на одинаковом расстоянии от центра ( $l_1=l_2$ ), то эллипс и подера трансформируются в окружность радиуса  $l_1$ , которую описывает точка пересечения шатунов при вращении базисов. Если установить на приборе угол  $\gamma=0^\circ$ , то при вращении базисов точка пересечения шатунов вычерчивает прямую линию под углом  $\varphi'$  к оси  $X'$ .

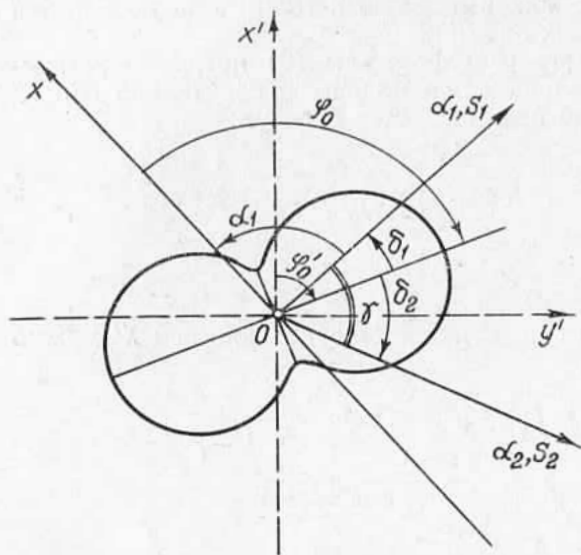


Рис. 3. Ориентировка подеры угловой засечки.

угол которой равен  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ). Отложив от этого направления против хода часовой стрелки угол  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ), проводят ось  $X$ .

$$\operatorname{tg} 2\delta_1 = \frac{\sin 2\gamma}{K_1^2 + \cos 2\gamma}, \quad \operatorname{tg} 2\delta_2 = \frac{\sin 2\gamma}{K_2^2 + \cos 2\gamma}. \quad (8)$$

Необходимо помнить, что большая ось подеры прямой угловой засечки располагается внутри острого угла  $\gamma$ . Если угол засечки тупой, то одно из направлений засечки необходимо поменять на обратное, а нумерацию направлений всегда вести по ходу часовой стрелки. Известно, что если одно или оба направления засечки поменять на обратные, то ориентировка подеры от этого не изменится. Для быстрого определения углов  $\varphi_0'$ ,  $\delta_1$  (или  $\delta_2$ ) можно построить соответствующие номограммы.

Анализ (8) позволяет констатировать, что  $\delta_1 + \delta_2$  всегда равняются острому углу  $\gamma$ . Если  $l_1=l_2$  (при  $K_1=K_2=1$ ), то  $\delta_1=\delta_2=\frac{\gamma}{2}$ , т. е. большая ось подеры прямой угловой засечки совпадает с направлением гипотенузы острого угла засечки. При  $\gamma=90^\circ$ ,  $\delta_1=0^\circ$  ( $\delta_2=90^\circ$ ), если  $K_1 > 1$  ( $K_2 < 1$ ); и  $\delta_1=90^\circ$  ( $\delta_2=0^\circ$ ), если  $K_1 < 1$

( $K_2 > 1$ ). В случае  $m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2}$ , то  $K = \frac{S_2}{S_1}$  и  $K_2 = \frac{S_1}{S_2}$ , следовательно, направление большой оси подеры совпадает с направлением меньшей стороны засечки. В общем случае при  $\gamma = 90^\circ$ , если  $K_1 = \frac{S_2 m_{\alpha_2}}{S_1 m_{\alpha_1}}$

и  $K_2 = \frac{S_1 m_{\alpha_1}}{S_2 m_{\alpha_2}}$ , направление большой оси подеры прямой угловой засечки совпадает с направлением той стороны, где произведение  $S_i m_{\alpha_i}$  меньше.

Сопоставление (6) и (8) позволяет отметить одну особенность прибора (см. рис. 2), а именно  $\varphi_0' + \delta_1 = 90^\circ$ , следовательно, угол между большой осью подеры и осью  $Y'$  всегда равен  $\delta_1$ . Поэтому (см. рис. 3) направление оси  $X$  можно найти, отложив от положительного или отрицательного направлений оси  $Y'$  против хода часовой стрелки угол  $2\delta_1 + \alpha_1$ .

Для ориентирования подеры линейной засечки (рис. 4) можно использовать методику для прямой угловой засечки, но все построения осуществлять относительно малой оси подеры или откладывать угол  $2\delta_1 + \alpha_1$  от положительного или отрицательного направлений оси  $X'$ . В любом случае дирекционный угол большой оси подеры можно вычислить по формуле

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{l_1^2 \sin 2\alpha_1 + l_2^2 \sin 2\alpha_2}{l_1^2 \cos 2\alpha_1 + l_2^2 \cos 2\alpha_2} + j\pi \right), \quad (9)$$

где  $j=1$  и  $3$  для угловой засечки;  $j=2$  и  $4$  для линейной засечки.

Методика построения эллипса и подеры с помощью подерографа (см. рис. 2) одинакова для любой простой засечки. Задача заключается лишь в определении величин  $l_1$  и  $l_2$  для правильной установки фиксаторов  $1$  и  $2$ . Так, на основании (4) и (5) и формул в [3] можно вычислить радиальную ошибку  $M$  любой засечки:

$$M^2 = m_x^2 + m_y^2 = \frac{\mu^2}{a_2 \sin^2 \gamma} + \frac{\mu^2}{a_1 \sin^2 \gamma} = l_1^2 + l_2^2, \quad (10)$$

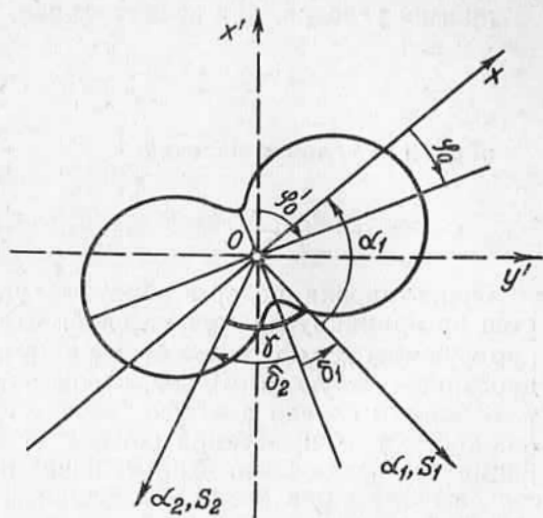


Рис. 4. Ориентировка подеры линейной засечки.

следовательно, в общем виде имеем

$$l_1 = \frac{\mu}{\sqrt{a_2 \sin \gamma}}, \quad l_2 = \frac{\mu}{\sqrt{a_1 \sin \gamma}}, \quad (11)$$

где  $\mu$  — средняя квадратическая ошибка единицы веса;  $a_i$  — величина, зависящая от вида засечки [3]:

**прямая угловая, или азимутальная, засечка**

$$a_i = p_{\alpha_i} q_i^2 = \frac{\mu^2}{m_{\alpha_i}^2} q_i^2, \quad \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} = \frac{m_{\alpha_i}}{q_i};$$

**обратная угловая засечка**

$$a_i = p_{\beta_i} q_{\beta_i}^2 = \frac{\mu^2}{m_{\beta_i}^2} q_{\beta_i}^2, \quad \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} = \frac{m_{\beta_i}}{q_{\beta_i}}.$$

Ориентировка подеры обратной угловой засечки осуществляется по принципу прямой угловой. Для этого градиенты углов  $q_{\beta}$  нумеруют по ходу часовой стрелки (в направлении возрастания их дирекционных углов  $\alpha_i$ ) так, чтобы они формировали острый угол  $\gamma$ . В данном случае  $\gamma$  — угол между градиентами измеренных углов засечки  $\beta_i$ , нумерация которых должна соответствовать нумерации их градиентов. Дальнейшие построения выполняются в соответствии с рис. 3 с использованием (6) или (8):

**линейная засечка**

$$a_i = p_{S_i} = \frac{\mu^2}{m_{S_i}^2}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} = m_{S_i};$$

**линейно-угловая засечка**

$$a_i = p_{S_i} - p_{\alpha_i} q_i^2 = \frac{\mu^2}{m_{S_i}^2} - \frac{\mu^2}{m_{\alpha_i}^2} q_i^2, \quad \frac{\mu}{\sqrt{a_i}} = \frac{m_{\alpha_i} m_{S_i}}{\sqrt{m_{\alpha_i}^2 - m_{S_i}^2} q_i}.$$

Подера линейно-угловой засечки ориентируется по принципу угловой, если под знаком радикала величина отрицательная, и по принципу линейной — в случае положительной.

В приведенных формулах  $p_{\alpha, \beta, S}$  — веса измеренных элементов засечек;  $q_{i, \beta_i}$  — градиенты направлений или углов;  $m_{\alpha, \beta, S}$  — средние квадратические ошибки измерения элементов засечек.

Таким образом, с помощью подерографа (см. рис. 2) можно дать оценку точности любой однократной засечки. Его можно использовать для уравнительных вычислений и оценки точности многократных засечек, а при совмещении базисов I и II прибора (см. рис. 1) возможно построение подеры по известным значениям  $A_0$  и  $B_0$ . Дальнейшие разработки позволят создать приборы, действующие в автоматическом режиме.

**Список литературы:** 1. Шеховцов Г. А. Графический способ оценки точности азимутальной засечки. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, вып. 4. 2. Шеховцов Г. А. А. с. 772899 (СССР). Прибор для построения плос-



кой кривой. — Оpubл. в Б. И., 1980, № 39. 3. *Шеховцов Г. А.* Графическая оценка точности засечек с учетом погрешностей исходных данных. — *Геодезия, картография и аэрофотосъемка*, 1981, вып. 34. 4. *Шеховцов Г. А.* А. с. 910472 (СССР). Прибор для построения подеры эллипса. — Оpubл. в Б. И., 1982, № 9. 5. *Шеховцов Г. А.* А. с. 984888 (СССР). Прибор для построения плоской кривой. — Оpubл. в Б. И., 1982, № 48.

Статья поступила в редколлегию 08.06.83