

Л. В. КУДРЯВЦЕВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ, УРАВНЕННЫХ БЕЗ СОСТАВЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Имеем транспонированную матрицу A' [2] размерами $n \times t (n > t)$ по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и A' состоят из координат базисных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{t}$ подпространства E^t .

Определим точность функции косвенных измерений

$$F = F_0 + \varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \dots + \varphi_t x_t, \quad (1)$$

где F_0 — приближенное значение функции F ;

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t$ — известные коэффициенты;

$x_1, x_2, \dots, x_t$ — уравненные неизвестные [2].

Выражение (1) можно представить в виде [5]

$$F = F_0 + (\bar{\varphi} \bar{x}), \quad (2)$$

где $\bar{\varphi}$ — вектор частных производных функции F .

Средняя квадратическая ошибка функции F вычисляется по известной формуле

$$m_F = \mu \sqrt{\frac{1}{P_F}}. \quad (3)$$

Из работы [5] известно, что обратный вес функции (1) есть квадрат модуля проекции вектора $\bar{f} \in E^n$ на подпространство E^t , т. е.

$$\frac{1}{P_E} = |\bar{\varphi}_t|^2. \quad (4)$$

Любой вектор $\bar{f} \in E^n$ можно представить, и притом единственным способом, в виде суммы [1]

$$\bar{f} = \bar{f}_t + \bar{f}_{n-t}, \quad (5)$$

где условию (11) отвечают уравнения

$$\begin{aligned}(\bar{a} \bar{f}_t) &= (\bar{a} \bar{f}) = \varphi_1; \\ (\bar{b} \bar{f}_t) &= (\bar{b} \bar{f}) = \varphi_2; \\ &\dots\dots\dots \\ (\bar{t} \bar{f}_t) &= (\bar{t} \bar{f}) = \varphi_i;\end{aligned}\tag{14}$$

C — квадратная и неособенная матрица n -го порядка [2].

Система (12) разрешима на ЭВМ и имеет единственное решение:

$$\bar{f}_t = C^{-1} \bar{\varphi}.\tag{15}$$

Таким образом, решив систему (12), получим координаты вектора $\bar{f}_t$.

По формуле (4) нетрудно определить обратный вес функции уравненных измерений (1). Определим координаты вектора $\bar{f}_t$ следующим образом. В силу условий

$$\bar{f}_{n-t} \perp E^t;\tag{16}$$

$$\bar{f}_{n-t} \in E^{n-t}\tag{16'}$$

запишем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}a_1 f_1'' + a_2 f_2'' + \dots + a_n f_n'' &= 0; \\ b_1 f_1'' + b_2 f_2'' + \dots + b_n f_n'' &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ t_1 f_1'' + t_2 f_2'' + \dots + t_n f_n'' &= 0; \\ u_1 f_1'' + u_2 f_2'' + \dots + u_n f_n'' &= \varphi_{t+1}; \\ s_1 f_1'' + s_2 f_2'' + \dots + s_n f_n'' &= \varphi_{t+2}; \\ &\dots\dots\dots \\ q_1 f_1'' + q_2 f_2'' + \dots + q_n f_n'' &= \varphi_n,\end{aligned}\tag{17}$$

или в векторно-матричной форме имеем уравнение

$$C \bar{f}_{n-t} = \bar{\varphi}',\tag{18}$$

где условию (16') отвечают уравнения

$$\begin{aligned}(\bar{u} \bar{f}_{n-t}) &= (\bar{u} \bar{f}) = \varphi_{t+1}; \\ (\bar{s} \bar{f}_{n-t}) &= (\bar{s} \bar{f}) = \varphi_{t+2}; \\ &\dots\dots\dots \\ (\bar{q} \bar{f}_{n-t}) &= (\bar{q} \bar{f}) = \varphi_n.\end{aligned}\tag{19}$$

Система (17) разрешима на ЭВМ и имеет единственное решение

$$\bar{f}_{n-t} = C^{-1} \bar{\varphi}',\tag{20}$$

Получив вектор $\bar{f}_{n-t}$, на основании (4) и (6) можно определить обратный вес функции (1):

$$\frac{1}{\bar{P}_F} = \sqrt{\bar{f} - \bar{f}_{n-t}^2}. \quad (21)$$

Укажем другой путь определения координат векторов $\bar{f}_t$ и $\bar{f}_{n-t}$. Вектор $\bar{f}_t$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов подпространства E^t [3]

$$\bar{f}_t = \bar{a}\lambda_1 + \bar{b}\lambda_2 + \dots + \bar{t}\lambda_t; \quad (22)$$

или в координатной форме будем иметь следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} f'_1 &= a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + \dots + t_1\lambda_t; \\ f'_2 &= a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots + t_2\lambda_t; \\ &\dots\dots\dots \\ f'_t &= a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + \dots + t_n\lambda_t. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично, представив вектор $\bar{f}_{n-t}$ в виде линейной комбинации базисных векторов подпространства E^{n-t} [2], получим

$$\bar{f}_{n-t} = \bar{u}\lambda_{t+1} + \bar{s}\lambda_{t+2} + \dots + \bar{q}\lambda_n, \quad (24)$$

или

$$\begin{aligned} f''_1 &= u_1\lambda_{t+1} + s_1\lambda_{t+2} + \dots + q_1\lambda_n; \\ f''_2 &= u_2\lambda_{t+1} + s_2\lambda_{t+2} + \dots + q_2\lambda_n \\ &\dots\dots\dots \\ f''_n &= u_n\lambda_{t+1} + s_n\lambda_{t+2} + \dots + q_n\lambda_n. \end{aligned} \quad (25)$$

В системах (23) и (25) λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) — неизвестные коэффициенты. Базисные векторы подпространства E^{n-t} определяются из условия ортогональности подпространства E^t и E^{n-t} [2]. Векторная сумма (5) с учетом (22) и (24) будет иметь вид

$$\bar{a}\lambda_1 + \bar{b}\lambda_2 + \dots + \bar{t}\lambda_t + \bar{u}\lambda_{t+1} + \bar{s}\lambda_{t+2} + \dots + \bar{q}\lambda_n = \bar{f}. \quad (26)$$

Запишем (26) в координатной форме

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + \dots + t_1\lambda_t + u_1\lambda_{t+1} + s_1\lambda_{t+2} + \dots + q_1\lambda_n &= f_1; \\ a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots + t_2\lambda_t + u_2\lambda_{t+1} + s_2\lambda_{t+2} + \dots + q_2\lambda_n &= f_2; \\ &\dots\dots\dots \\ a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2 + \dots + t_n\lambda_t + u_n\lambda_{t+1} + s_n\lambda_{t+2} + \dots + q_n\lambda_n &= f_n, \end{aligned} \quad (27)$$

или в векторно-матричной форме

$$C'\bar{\lambda} = \bar{f}, \quad (28)$$

где C' — транспонированная матрица n -го порядка по отношению к матрице C .

Система (27) разрешима на ЭВМ и притом однозначно:

$$\bar{\lambda} = (C')^{-1}\bar{f}. \quad (29)$$

Следовательно, решив систему (27), будем иметь n неизвестных коэффициентов λ_i ($i=1, 2, \dots, t, t+1, t+2, \dots, n$).

Координаты векторов $\bar{f}_t$ и $\bar{f}_{n-t}$ можно найти из уравнений (23) и (25), подставив туда соответствующие по индексу найденные неизвестные коэффициенты. Обратный вес функции F определяется по формулам (4) или (21). Контролем вычислений служит ортогональность векторов $\bar{f}_t$ и $\bar{f}_{n-t}$, т. е.

$$(\bar{f}_t \bar{f}_{n-t}) = 0. \quad (30)$$

Подчеркнем, что векторы $\bar{f}_t$ и $\bar{f}_{n-t}$ обладают характеристическим свойством минимальности [3], т. е.:

$$(\bar{f}_t \bar{f}_t) = \min; \quad (31)$$

$$(\bar{f}_{n-t} \bar{f}_{n-t}) = \min. \quad (32)$$

Заключительным контролем изложенной математической обработки результатов косвенных измерений является ортогональность вектора поправок $\bar{v} \in E^{n-t}$ [2] и вектора $\bar{f}_t \in E^t$, а также ортогональность вектора поправок $\bar{\delta} \in E^t$ [2] и вектора $\bar{f}_{n-t} \in E^{n-t}$, т. е.

$$(\bar{v} \bar{f}_t) = 0; \quad (33)$$

$$(\bar{\delta} \bar{f}_{n-t}) = 0. \quad (34)$$

Пример. Данные для примера используются из работы [2]. Требуется определить обратный вес функции уравненных измерений [2, 4, стр. 103—106]:

$$\Delta F = x_1 + x_2 + x_3. \quad (35)$$

Уравнению (12) для данного примера будет соответствовать следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ f'_4 \\ f'_5 \\ f'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где условию (16') отвечают уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (\bar{a} \bar{f}) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1; \\ \varphi_2 &= (\bar{b} \bar{f}) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1; \\ \varphi_3 &= (\bar{c} \bar{f}) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Числовые значения коэффициентов матрицы C , входящей в (36), взяты из выражения (53) [2].

После решения системы (36) на ЭЦВМ «Наири» (или методом исключения вручную) получим координаты вектора $\bar{f}_t$

$$\bar{f}_t = (0,25; 0,25; 0,5; 0; 0,25; 0,25). \quad (38)$$

Определим координаты вектора $\bar{f}_t$ следующим образом. Уравнению (17) отвечает выражение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ f_4'' \\ f_5'' \\ f_6'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

где на основании (19)

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= (\bar{u} \bar{f}) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -2; \\ \varphi_5 &= (\bar{s} \bar{f}) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -1; \\ \varphi_6 &= (\bar{q} \bar{f}) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3, \end{aligned} \quad (40)$$

$\bar{u}, \bar{s}, \bar{q}$ — базисные векторы подпространства E^{6-3} [2].

После решения (39) на ЭЦВМ «Наири» получены такие координаты вектора $\bar{f}_{n-t}$:

$$\bar{f}_{n-t} = (0,75; -0,25; -0,5; 1; -0,25; 0,75). \quad (41)$$

По формуле (6), вычитая из координат вектора $\bar{f}$ координаты вектора $\bar{f}_{n-t}$, получим координаты вектора $\bar{f}_t$:

$$\bar{f}_t = (0,25; 0,25; 0,5; 0; 0,25; 0,25),$$

что согласуется с результатом (38).

Рассмотрим другой путь определения координат векторов $\bar{f}_t$ и $\bar{f}_{n-t}$. Уравнение (27) для данного примера имеет выражение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

После решения (42) на ЭЦВМ «Наири» получены значения коэффициентов λ_i ($i=1, 2, \dots, 6$):

$$\lambda_1 = 0,25; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 0,25; \lambda_4 = -0,25; \lambda_5 = 0,25; \lambda_6 = 0,75.$$

Вычислим координаты вектора $\bar{f}_t$ из системы (23), вводя туда координаты базисных векторов подпространства E^3 [2] и полученные коэффициенты λ_1, λ_2 и λ_3 :

$$\begin{aligned} f_1' &= 1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0,25 = 0,25; \\ f_2' &= 1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В результате получим следующий вектор $\vec{f}_t$:

$$\vec{f}_t = (0,25; 0,25; 0,5; 0; 0,25; 0,25),$$

что согласуется с результатом (38).

Определим координаты вектора $\vec{f}_{n-t}$. Вычислим координаты вектора $\vec{f}_{n-t}$ из системы (25), вводя туда координаты базисных векторов подпространства E^{6-3} и остальные найденные коэффициенты λ_4 , λ_5 и λ_6 :

$$f_1^* = -1 \cdot (-0,25) + (-1) \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,75 = 0,75;$$

$$f_2^* = 1 \cdot (-0,25) + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,75 = -0,25 \text{ и т. д.}$$

В результате найдем вектор

$$\vec{f}_{n-t} = (-0,75; -0,25; -0,5; 1; -0,25; 0,75),$$

что согласуется с результатом (41).

По формуле (6) получим вектор $\vec{f}_t$ (38). Используя результат (38), вычислим обратный вес функции уравненных измерений (35) по формуле (4):

$$\frac{1}{P_F} = 0,25^2 + 0,25^2 + 0,5^2 + 0^2 + 0,25^2 + 0,25^2 = 0,5000, \quad (43)$$

что согласуется с результатом, полученным в работе [4]:

$$\frac{1}{P_F} = 0,500.$$

Проверим наши вычисления:

$$(\vec{f}_t \vec{f}_{n-t}) = 0,25 \cdot 0,75 + 0,25 \cdot (-0,25) + 0,5 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 1 + \\ + 0,25 \cdot (-0,25) + 0,25 \cdot 0,75 = -0,25 + 0,25 = 0,$$

что удовлетворяет условию (30).

Заключительный контроль наших вычислений:

$$(\vec{v} \vec{f}_t) = -1,5 \cdot 0,25 + 1,0 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,5 + (-1,0) \cdot 0 + (-0,5) \cdot 0,25 + \\ + 0 \cdot 0,25 = -0,375 + 0,25 + 0,25 + 0 - 0,125 + 0 = -0,5 + 0,5 = 0,$$

что удовлетворяет условию (33);

$$(\vec{\delta} \vec{f}_{n-t}) = 0,1 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot (-0,25) + (-3,7) \cdot (-0,5) + 0,4 \cdot 1 + \\ + (-3,8) \cdot (-0,25) + (-4,2) \cdot 0,75 = 0,075 - 0,125 + \\ + 1,85 + 0,4 + 0,95 - 3,15 = 3,275 - 3,275 = 0,$$

что удовлетворяет условию (34).

Значения координат векторов $\vec{v}$ и $\vec{\delta}$ взяты соответственно из результатов (52) и (53) [2].

Заключение. Предлагаемое решение позволяет получить обратный вес функции уравненных измерений на ЭВМ без составления и решения нормальных уравнений, глубже изучить геометрическую сущность последнего и обеспечить надежный контроль вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
2. Кудрявцев Л. В. Уравнивание косвенных измерений в n -мерном пространстве. В сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 8. Изд-во Львов. ун-та, 1968.
3. Кюнц Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. М., «Советское радио», 1965.
4. Мазмишвили А. И., Беляев Б. И. Способ наименьших квадратов. Геодезиздат, 1959.
5. Петраш А. С. Средняя квадратическая ошибка функции уравненных величин. Материалы научн. конференции Харьков. с.-х. ин-та, вып. 6. Харьков, 1967.

Работа поступила
23 февраля 1968 г.
