

А. Л. ДОРОЖИНСКИЙ

**УРАВНИВАНИЕ БЛОКА АНАЛИТИЧЕСКОЙ  
ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ СПОСОБОМ ПОЛИГОНОВ**

Наибольшее распространение в практике получили аналитические способы фототриангуляции, основанные на построении основных звеньев: стереопары и маршрута. Наряду с большими достоинствами этих способов, их недостатком является пренебрежение геометрическими условиями и межмаршрутными связями. Использование этих дополнительных условий повышает точность триангулирования в полтора-два раза [1, 2].

Если продольное и поперечное перекрытие  $P_x = P_y = 60\%$ , то в качестве основной фигуры-подблока можно взять четырехугольник, образованный смежными центрами проекций двух маршрутов. П. Д. Гуком довольно детально разработан вопрос о построении и уравнивании такого подблока при наличии измеренных в полете поперечных базисов фотографирования, а также по материалам обычной аэрофотосъемки. Однако при построении большого блока метод одновременного уравнивания подблоков, предложенный в работе [1], представляется нам громоздким и нерациональным.

В самом деле, пусть блок состоит из  $10 \times 10 = 100$  снимков; тогда имеем  $9 \times 9 = 81$  подблок. Так как в каждом подблоке возникает три условных угловых уравнения

$$\Sigma \alpha = 0, \quad \Sigma \omega = 0, \quad \Sigma \kappa = 0 \tag{1}$$

и три базисных условных уравнения

$$\Sigma \bar{B}_x = 0, \quad \Sigma \bar{B}_y = 0, \quad \Sigma \bar{B}_z = 0, \tag{2}$$

появляется необходимость совместного решения минимум 81 уравнения коррелят. Известно, что при использовании электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) решение больших систем линейных уравнений представляет определенную трудность. Поэтому мы предлагаем применить способ последовательных приближений, используемый в геодезии для уравнивания нивелирных сетей, — способ Попова (способ полигонов). Поясним его применение для решения фотограмметрического блока.

Пусть предварительно по известной методике [1] решены и уравнены все подблоки отдельно, а также частично исключены систематические ошибки. В результате выполнения этого процесса имеем вычисленные и уравненные угловые элементы  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  для всех четырех снимков, приведенные к одной условной плоскости подблока, и компоненты пространственных базисов — сторон подблока  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ , приведенные к

произвольно выбранному начальному базису подблока. Вычислим разности для всех сторон подблоков:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha_n - \alpha_l, \\ \Delta\omega &= \omega_n - \omega_l, \\ \Delta x &= x_n - x_l.\end{aligned}\tag{3}$$

Так как одноименные элементы одних и тех же сторон участвовали в решении двух соседних подблоков ( $i$  и  $i+1$ ), то ясно, что

$$\begin{aligned}\Delta\alpha_i &\neq \Delta\alpha_{i+1}, & B_{x_i} &\neq B_{x_{i+1}}, \\ \Delta\omega_i &\neq \Delta\omega_{i+1}, & B_{y_i} &\neq B_{y_{i+1}}, \\ \Delta x_i &\neq \Delta x_{i+1}; & B_{z_i} &\neq B_{z_{i+1}}.\end{aligned}\tag{4}\tag{5}$$

Вычислим невязки на смежных сторонах:

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \Delta\alpha_i - \Delta\alpha_{i+1}, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \delta z &= B_{z_i} - B_{z_{i+1}}.\end{aligned}\tag{6}$$

Для уменьшения величин невязок  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  предполагается, что при решении отдельных подблоков начальный базис для последующего подблока берется из решения предыдущего. Кроме того, если величины  $\Delta\alpha, \dots, B_z$  содержали систематические ошибки, то при составлении уравнений (6) происходит их частичная компенсация. По величинам невязок на одноименных сторонах легко вычислим невязки в полигонах-подблоках:

$$f_{l\alpha, \dots, z} = \sum_{j=1}^{i-4} \delta a_{\alpha, \dots, z}.\tag{7}$$

Для сторон, не являющихся общими для двух подблоков, невязки (6) принимаются равными нулю.

Так как величины  $\alpha, \dots, B_z$  взаимно не связаны, уравнивание можно вести раздельно по каждому элементу. Итак, здесь наблюдается картина, аналогичная уравниванию нивелирного хода: имеется сеть полигонов, вычислена невязка в каждом полигоне, и ее необходимо разбросать так, чтобы во всех полигонах невязки равнялись нулю. Сущность и методика уравнивания по способу Попова хорошо изложена в геодезической литературе. Для ясности дальнейшего изложения напомним методику уравнивания, используя «фотограмметрический» пример (рис. 1).

Пусть имеем блок из четырех снимков. Величины невязок в полигонах  $f_a$  вычислены по ходу часовой стрелки и записаны в столбцы  $M_f, \dots, M_f$ . В случае использования ЭЦВМ они записываются в матрицу  $M_f$ . Для полигонов и сторон принята нумерация, указанная на рис. 2. Уравнивание начинается с отыскания  $f_{\max}$ . Считая все величины  $\alpha$  равноточными, найдем невязки в каждую из сторон 5, 6, 7, 8:  $\frac{f_{\max}}{4} = -\frac{10}{4} = -2,5$  и запишем эту величину в столбцы, соответствующие каждой стороне. В случае применения ЭЦВМ вычисленная величина

записывается в матрицу сторон  $M_0(M_{\delta_1}, \dots, M_{\delta_n})$ . Так как сторона 7 и 13 принадлежит двум смежным блокам, то величина невязки подблока IV изменится:  $f_4 = +7 - 2,5 = +4,5$ . Разбросаем эту невязку в стороны 13—16 и запишем в соответствующие столбцы-матрицы. Аналогично

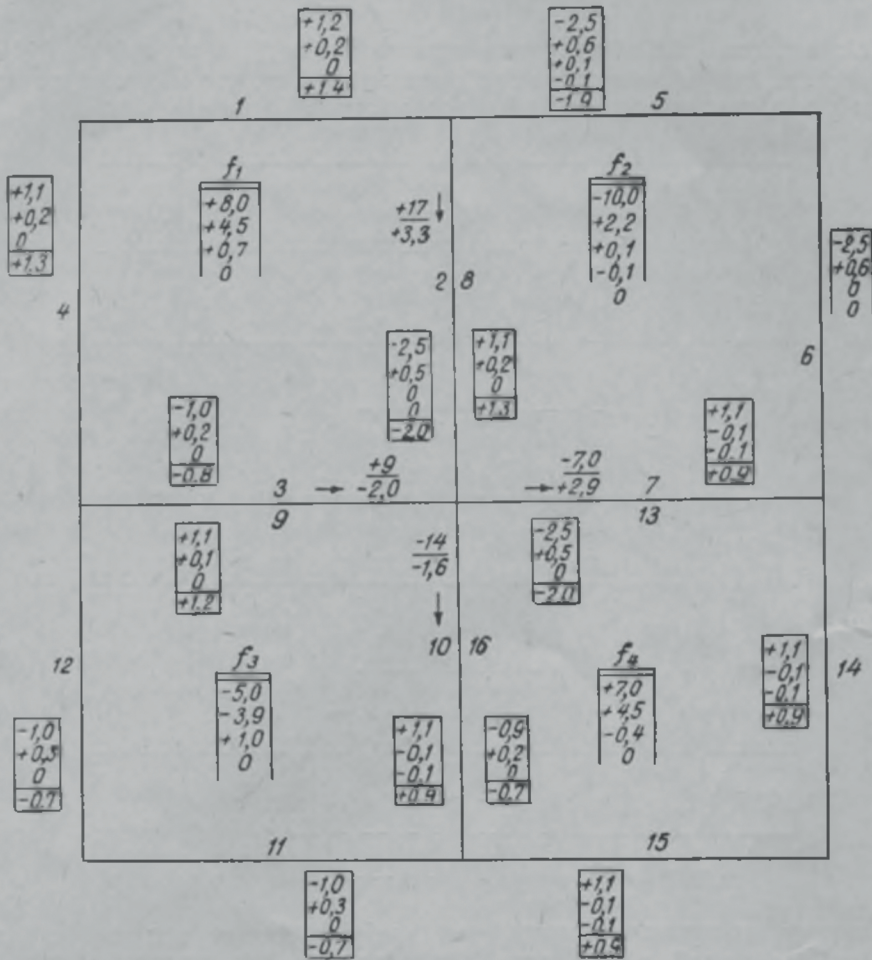


Рис. 1. Числовой пример уравнивания элементов  $\alpha$  блока по способу полигонов:

1 — номер стороны;  $\frac{+17}{+3,3}$  — в числителе невязка  $\delta\alpha$ , в знаменателе поправка в элемент  $\Delta\alpha$  с обратным знаком;  $+1,3$  — поправка в элемент  $\Delta\alpha$  крайней стороны с обратным знаком.

поступим с подблоками 3 и 1. На этом заканчивается первое приближение. Второе приближение начинается снова с подблока 2. Для него вычисляем новую невязку как сумму новых невязок в сторонах 2 и 13:  $\delta\alpha_2 + \delta\alpha_{13} = +1,1 + 1,1 = +2,2$ . Далее процесс повторяется аналогично первому приближению до тех пор, пока остаточные невязки в полигонах не достигнут практически пренебрегаемой величины — допуска  $\Delta$  (в нашем случае  $|\Delta| = 0,1$ ). Затем, алгебраически суммируя все невязки, записанные в столбцах-матрицах для сторон, и меняя знак суммы на

обратный, получим искомую поправку в элемент  $\Delta\alpha$  соответствующей стороны. Контролем вычислений служит:

$$\left| \sum_{i=1}^{l-1} \delta_i - f_{\text{подблока}} \right| \leq |\Delta|.$$

По вышеописанной методике задача может быть решена на ЭЦВМ. Как видим, математически метод довольно прост, что для нас особенно ценно по сравнению со способом совместного решения подблоков. Он

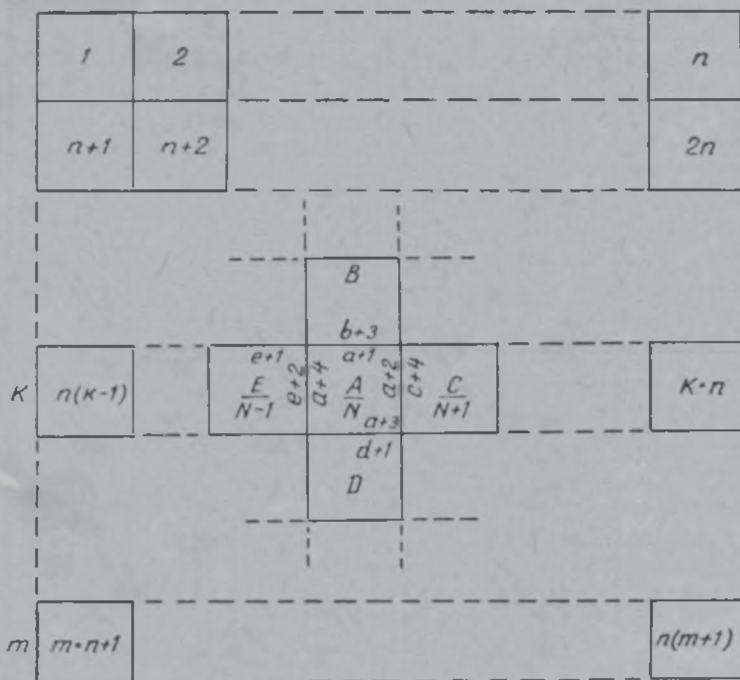


Рис. 2. Вариант нумерации подблоков и сторон в блоке.

удобен для программирования, так как появляется возможность использования одной и той же подпрограммы для уравнивания всех шести элементов  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ . К недостаткам его следует отнести необходимость значительного объема памяти машины для хранения массива информации, а также несколько сложную логику. Для блока из  $10 \times 10$  снимков для матрицы  $M$ , необходимо иметь 81 ячейку, для матрицы сторон:  $M_s = 2p + q = 324$ , итого 405 ячеек.

Здесь  $p$  — число смежных сторон в блоке;

$q$  — число несмежных сторон:

$$p = (a - 1)(b - 2) + (a - 2)(b - 1);$$

$$q = 2(a + b - 2);$$

$a$  — число снимков в ряду (маршруте);

$b$  — число рядов в блоке.

В случае учета весов число ячеек удваивается. При нумерации, принятой на рис. 2, блок-схема решения задачи может иметь такой вид:

- 1) организация циклов по числу элементов;
- 2) организация циклов для  $i$ -той итерации;
- 3) организация циклов по числу подблоков;
- 4) решение задачи:
  - а) поиск  $f_{\max}$ , вычисление номера подблока с  $f_{\max}$ ,
  - б) вычисление номеров ячеек (адресов) для сторон этого подблока,
  - в) вычисление невязок в сторонах и запись в ячейки,
  - г) отыскание номера следующего подблока, номеров его сторон и смежных с ним.
  - д) вычисление новой невязки этого подблока,
  - е) повторение пунктов 3—5 для всех подблоков;
- 5) проверка по числу подблоков;
- 6) проверка на окончание итерационного процесса;
- 7) вычисление поправок в соответствующий элемент и стороны, оценка точности уравненных величин, печать или запись в НМЛ (НМБ) (накопитель на магнитной ленте (барабане));
- 8) проверка по числу элементов;
- 9) окончание уравнивания.

Для реализации этой блок-схемы применимы обычные приемы программирования. При отыскании  $f_{\max}$  используем метод выделения максимальной величины из ряда чисел путем последовательного сравнения абсолютных величин этих чисел. Если величины  $f_i$  последовательно записаны в ячейки  $a+1, a+2, \dots, a+s$ , где  $s$  — число подблоков, то номер подблока легко найти вычитанием адресов:

$$N = (a + i)_{\max} - (a + 1) + 1.$$

Предположим, что имеем блок (рис. 2), состоящий из  $n \times m$  подблоков; нумерация подблоков и сторон показана на рис. 2. Пусть подблок с номером  $N$  имеет максимальную невязку

$$N = n(k-1) + l.$$

Здесь  $n$  — число подблоков в ряду;  
 $k$  — номер ряда с  $f_{\max}$ ;  
 $l$  — номер подблока в ряду.

Число  $k$  легко найти как  $k = \frac{N}{n}$  с выделением только целой части частного; например,  $k = \frac{35}{10} = 3,5$ , номер ряда  $k = 3$ .

$$l = N - n(k-1).$$

Числа  $k$  и  $l$  необходимы для отыскания номеров смежных подблоков, а затем адресов смежных сторон. Адреса сторон подблока  $N$  легко найти:

$$\begin{aligned} a + 1 &= 4(kn + l) - 3, & a + 2 &= 4(kn + l) - 2, \\ a + 3 &= 4(kn + l) - 1, & a + 4 &= 4(kn + l). \end{aligned}$$

Адреса смежных подблоков в ряду равны: для подблока  $E$

$$N-1 = n(k-1) + l-1,$$

для подблока  $C$ :

$$N+1 = n(k-1) + l+1.$$

Номера для верхнего  $A$  и нижнего  $B$  подблоков будут отличаться от  $N$  на величину  $n$ :

$$B \rightarrow n(k-1) + l - n = n(k-2) + l,$$

$$D \rightarrow n(k-1) + l + n = nk + l.$$

Из чертежа прочитаем номера граничащих сторон и определим их адреса:

$$a + 1 \rightarrow b + 3 = 4[n \cdot (k-2) + l] - 1,$$

$$a + 2 \rightarrow b + 4 = 4[n \cdot (k-1) + l + 1],$$

$$a + 3 \rightarrow b + 1 = 4[n \cdot k + l] - 3,$$

$$a + 4 \rightarrow b + 2 = 4[n \cdot (k-1) + l - 1] - 2.$$

Таким путем производятся вычисления для каждого подблока, находящегося в середине блока, т. е. имеющего четыре смежные стороны. Кроме того, возможны варианты, когда подблок имеет две смежные стороны ( $1, n, mn+1, \dots$ ) и три смежные стороны (подблок с номерами:  $n+1, 2n, \dots, mn+1-n, mn$ ). Поэтому предварительно необходимо определить, к какой группе относится подблок, а затем, пользуясь логической шкалой, произвести вычисления адресов смежных сторон данной группы. Если имеем две стороны, то для подблока  $l$  отсутствуют подблоки  $B$  и  $E$ , для подблока  $n-B$  и  $C$  и т. д.

Результаты уравнивания элементов  $\Delta a$   
по способу полигонов и по строгому способу

№ сторон	Истинные значения $\Delta a$ , мин	Невязки в сторонах $\bar{\Delta} a$	Поправки, определенные	
			по способу полигонов	по строгому способу
1	+ 50	0	-1,5	-1,38
2	-120	0	+1,9	+1,88
3	+ 90	+9	-2,0	-2,00
4	- 20	-7	+3,0	+3,00
5	+ 60	0	+0,5	+0,62
6	-100	0	-1,0	-1,12
7	- 70	0	-1,3	-1,38
8	- 30	+17	-3,2	-3,25
9	+ 70	0	+1,9	+1,88
10	+ 80	0	+0,7	+0,62
11	+ 50	-14	-1,8	-1,75
12	- 30	0	-1,1	-1,12

$$m_a = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{40,78}{12}} = \pm 1,8$$

Допустим, что адреса смежных сторон вычислены, невязка подблока  $N$  разбросана и записана в соответствующие ячейки. Затем переходим к подблоку с номером  $N+1$ . Проверкой устанавливаем, к какой группе относится новый подблок, и производим разбрасывание невязки с записью в вычисленные адреса ячеек. Таким путем вычисляем все подблоки до конца ряда. При переходе к следующему ряду номер подблока вычисляется как  $k \cdot n + n = n(k+1)$ , затем оперируем с подблоком  $n(k+1) - 1$  и так до конца блока, т. е. используется правило хода: слева направо, вниз, затем справа налево, вниз, затем слева направо и т. д. Проверив, вычислен ли последний подблок, начинают разбрасывать

невязки с полигона  $N-1$  и до начального подблока. Затем производится проверка на окончание итерационного процесса; в случае необходимости процесс снова повторяется с подблока  $N$ .

Оценка точности уравненных величин производится по формуле

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n}},$$

$v$  — поправка в соответствующий элемент ( $a, \dots, B_2$ );

$n$  — число сторон в блоке.

Составление программы по описанному алгоритму не вызывает особых затруднений. Возможны, конечно, и другие варианты реализации уравнивания по способу полигонов.

В заключение отметим, что описанный здесь способ проверен на макете (рис. 1). Уравнивание выполнено по способу полигонов и по строгому способу (условных измерений). Полученные результаты, приведенные в таблице, подтверждают применимость этого алгоритма для уравнивания фотограмметрических блоков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гук П. Д. Фототриангуляция с использованием измеренных в полете базисов и разностей высот фотографирования. Тр. НИИГАиК, т. XIX, 1967.

2. Branderberger A. Strip triangulation with Independent Geodetic Controls: Triangulation of Strip Quadrangles. «Photogrammetria», № 2, 1958—1959.

Работа поступила  
7 мая 1968 г.