УДК 528.3

С. И. ПУЗАНОВ
Львовский политехнический институт

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕННЫХ УГЛОВ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

В работе [1] сравнены три способа предварительной оценки точности измеренных горизонтальных углов в триангуляции и показано, что:

1) формула (Ферреро-С. П.)

$$\mu = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}} \tag{1}$$

дает первое приближение;

2) формула, предложенная Л. Н. Келлем,

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{w^2}{[aa]}\right]} \tag{2}$$

дает второе приближение;

3) формула, применяемая после уравнивания,

$$\mu=\sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \qquad (3)$$

дает окончательное значение, но после уравнивания.

В формулах (1)—(3) приняты следующие обозначения; μ — средняя квадратическая ошибка измерения угла; w — свободные члены условных уравнений; n — число условий, возникающих в сети; v — поправки в углы, полученные по результатам уравнивания; r — число избыточных измерений.

Однако Л. Н. Келль использовал небольшое число (10) мелких сетей и его выводы не получили широкого применения. Упростим и приведем к рабочему виду формулу (2), а затем сравним все три формулы на большом производственном материале.

В настоящее время, согласно требованиям инструкции [2], оценка точности измерения углов производится по формуле (1). Причем, предварительно следует проверить, нет ли в сети триангуляции треугольников с недопустимыми невязками. Кроме того, в инструкции установлены допустимые значения свободных членов боковых и полюсных условий в геодезических четырехугольниках и центральных системах *.

Известно, что в свободной сети триангуляции кроме условий фигур, могут возникать еще условия горизонтов и полюсов. При оценке точности угловых измерений по формуле (1) невязки треугольников вычисляют по углам, уравненным на станции. А поскольку углы уже уравнены на станции, сумма их на каждом пункте составляет 360° и свободные члены условий горизонта равны нулю. Значит, оценка точности измерения углов по свободным членам условий горизонта невозможна и в свободной сети триангуляции остаются два вида условий, свободные члены которых можно использовать для оценки точности угловых измерений. Это условия фигур и полюсов.

Приведем формулу Л. Н. Келля (2) к рабочему виду, для чего введем обозначения; w_f — свободный член условия фигуры; w_p — свободный член условия полюса; n_f — число треугольников в сети триангуляции; n_p — число полюсных условий, возникающих в сети.

Если оценивать точность только по свободным членам условий фигур, то формула (2) примет вид

$$\mu f=\sqrt{\frac{1}{n_f}\left[\frac{w_f^2}{3}\right]}=\sqrt{\frac{[w_f^2]}{3\,n_f}}, \qquad (1')$$

---

* $w_{доп}=\pm 2{,}5\,\mu\sqrt{\Sigma\delta^2}$ (4), где $\Sigma\delta^2$ — сумма квадратов изменений логарифмов синусов связующих углов треугольников при изменении этих углов на 1″ [2]; μ — установленная инструкцией средняя квадратическая ошибка измерения угла для соответствующего класса триангуляции.

(для условий фигур $a=1$ и для каждого треугольника $[aa]=3$). Обозначив $k_f=\frac{1}{3}$, получим

$$\mu_f=\sqrt{\frac{k_f[w_f^2]}{n_f}}. \tag{5}$$

Введем обозначение $[\delta\delta]_m$ для средней суммы квадратов изменений логарифмов синусов связующих углов при изменении этих углов на $1''$, которая равна полной сумме, разделенной на число полюсных условий

$$[\delta\delta]_m=\frac{\Sigma[\delta\delta]}{n_p}. \tag{6}$$

Тогда для оценки точности с использованием только свободных членов условий полюсов формулу (2) запишем

$$\mu_p=\sqrt{\frac{1\ [w_p^2]}{n_p[\delta\delta]_m}}=\sqrt{\frac{[w_p^2]}{\Sigma[\delta\delta]}}. \tag{7}$$

Обозначив $k_p=\frac{1}{[\delta\delta]_m}$, получим

$$\mu_p=\sqrt{\frac{k_p[w_p^2]}{n_p}}. \tag{8}$$

Для совместной оценки точности угловых измерений с использованием свободных членов условий фигур и полюсов формула (2) примет вид

$$\mu_{fp}=\sqrt{\frac{k_f[w_f^2]+k_p[w_p^2]}{n_f+n_p}}. \tag{9}$$

При этом ошибки μ_f и μ_p получаем с весами $p_f=n_f$ и $p_p=n_p$. Формулу (9) нетрудно доказать, используя известное выражение

$$\bar{x}_m=\frac{[x_ip_i]}{[p_i]}, \tag{10}$$

называемое формулой общей арифметической середины или среднего весового. Формулу (10) можно применять и для получения среднего весового из средних квадратических ошибок

$$\mu=\sqrt{\frac{\mu_1^2p_1+\mu_2^2p_2+\ldots+\mu_n^2p_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}}. \tag{11}$$

Справедливость этого приема легко доказать, поскольку для равноточных значений ошибок, все веса которых равны единице, формулу (11) можно записать так:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2}{n}}.$$

Применяя выражение (11) для доказательства формулы (9), получаем

$$\mu_{fp} = \sqrt{\frac{\mu_f^2 n_f + \mu_p^2 n_p}{n_f + n_p}} = \sqrt{\frac{\frac{k_f [w_f^2]\, n_f}{n_f} + \frac{k_p [w_p^2]\, n_p}{n_p}}{n_f + n_p}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k_f [w_f^2] + k_p [w_p^2]}{n_f + n_p}}. \qquad (12)$$

Формулу (9) можно использовать для оценки точности угловых измерений не только в свободной, но и в несвободной сети. Действительно, в несвободной сети дополнительно возникают азимутальные, базисные и координатные условия, но их значительно меньше, чем условий фигур и полюсов, поэтому они незначительно изменят значение средней квадратической ошибки, получаемой по формуле (9). Учитывая приближенный характер формулы (9), ее можно рекомендовать для предварительной оценки точности как свободных, так и несвободных сетей триангуляции.

Итоги сопоставления формул (1), (3), (8) и (9)

Район (участок) сети триангуляции	μ_f по формуле (1)	Количество треугольников в сети	μ_p по формуле (8)	Количество полюсных условий сети	$\mu_{ур}$ ср. кв. ошибка из уравнивания	Увеличение μ_p в % от μ_f	μ_{fp} по формуле (9)	Увеличение μ_{fp} в % от μ_f
Дальний Восток								
Восточный участок	±0,935″	660	±1,185″	338	±1,150″	26,7	±1,032″	10,4
Западный участок	0,832	268	1,125	103	1,100	35,3	0,921	10,7
Весь район	0,908	928	1,170	441	1,135	28,8	0,990	9,0
Магадан								
Восточный участок	0,915	193	1,060	74	—	15,8	0,955	4,4
Западный участок	0,925	143	1,051	53	—	14,2	0,961	3,8
Весь район	0,920	336	1,060	127	—	15,2	0,957	3,9
Казахстан								
Северный участок	0,815	273	0,945	124	—	16,0	0,856	5,0
Южный участок	0,833	172	0,875	64	—	5,0	0,846	1,5
Весь район	0,821	445	0,924	188	—	12,5	0,850	3,5
Коми АССР	0,834	241	1,300	128	—	56,0	1,019	22,2
По всем районам	0,880	1950	1,157	884	—	31,5	0,968	10,0

Проведем сравнительную оценку точности измерения углов в обширной сети триангуляции (включающей 1950 условий фигур и 884 полюсных условий) с использованием формул (1), (3), (8) и (9). Для эксперимента были выбраны следующие районы: Дальний Восток, Магадан, Казахстан и Коми АССР. Результаты проверки формул (1), (3), (8) и (9) приведены в таблице. Проанализировав полученные данные, сделаем следующие выводы:

1. Оценка точности угловых измерений по невязкам треугольников, т. е. по формуле (1), дает всегда заниженное значение средней квадратической ошибки. Это можно объяснить тем, что в производственных подразделениях стараются перенаблюдать не только треугольники с недопустимыми невязками, но и с невязками, которые близки к предельным. Это приводит к уменьшению средней квадратической ошибки без существенного повышения точности измерения углов в целом.

2. Для более объективной оценки точности угловых измерений в триангуляции 2 кл. в инструкции [2] вместо предельной невязки треугольника 4″ правильнее было бы записать: «Предельное значение невязок треугольников 2 кл., как правило, не должно превышать 3,5″. Число невязок в пределах 3,5″—5,0″ не должно превышать 5% общего числа треугольников». Это легко обосновать несложными вычислениями $m_{\text{пред}} = 2{,}0 \times \mu \times \sqrt{3} = 2{,}0 \times 1'' \times \sqrt{3} = 3''5$, а если вместо коэффициента 2,0 подставить 3,0 *, получим 5,0″. Тогда придется учитывать, что согласно нормальному закону распределения случайных величин лишь 5% общего числа невязок может превосходить 2 m.

3. Средняя квадратическая ошибка измерения угла, вычисленная по свободным членам полюсных условий, т. е. по формуле (8), по всем районам получилась на 10—30% больше, чем по невязкам треугольников. Для двух участков Дальнего Востока автор располагал средней квадратической ошибкой измерения угла $\mu_{\text{ур}}$ по результатам уравнивания:

Восточный участок	$\mu_p = \pm 1{,}185''$	$\mu_{yp} = \pm 1{,}150''$
Западный участок	$\mu_p = \pm 1{,}125$	$\mu_{yp} = \pm 1{,}100$

Согласованность этих средних квадратических ошибок позволяет говорить о том, что формула (8) дает результат наиболее близкий к средней квадратической ошибке, получаемой по строгой формуле (3).

4. В несвободных сетях значение $\mu_{\text{ур}}$ по формуле (3) иногда получают значительно преувеличенным по отношению к μ_f, что можно объяснить влиянием исходных данных. В исследуемой сети исходная основа была очень редкой и это, вероятно, позволило получать по результатам уравнивания надежное значение средней квадратической ошибки измерения угла.

Интересно проанализировать результаты совместной оценки точности сети триангуляции в районе Коми АССР по формулам (1) и (8). Для этого района значение μ_p больше, чем μ_f на 56,0% и составляет 1,300″ при $\mu_f = \pm 0{,}834''$. Следует заметить, что в сети триангуляции 2 кл. есть 10 недо-

---

* Что соответствует вероятности 99,7% попадания в интервал $-3\,m \ldots \ldots +3\,m$.

пустимых свободных членов полюсных условий, превышающих 2,5 $\mu\sqrt{[\delta^2]}$, и 21 значение (при допуске 6), превышающих 2,0 $\mu\sqrt{[\delta^2]}$. Вместе с тем, недопустимых значений невязок треугольников нет, а невязок треугольников более 3″ — только 7 *.

Следовательно, можно сделать вывод, что качество измерения углов в этой сети невысокое. Очевидно, все треугольники с недопустимыми (и крупными, но допустимыми) невязками перенаблюдались в поле сразу же после предварительных вычислений. Системы же с недопустимыми значениями свободных членов полюсных условий не перенаблюдались, так как это было связано со значительными затратами времени, сил и средств. Следует иметь в виду, что для перенаблюдения одного треугольника с недопустимой невязкой достаточно перенаблюдать 1—2, максимум 3 пункта, а для перенаблюдения полюса — 6 и даже 8. Можно предположить, что несоответствие μ_p и μ_f для других районов объясняется тем же.

Оценка точности измерения углов с помощью свободных членов полюсных условий исследовалось по полевым материалам четырех различных районов Советского Союза, включающим 7 участков, 1950 треугольников и 884 полюса. Во всех районах и на всех участках наблюдалась одна и та же закономерность ($\mu_p > \mu_f$), что почти исключает элемент случайности.

5. Оценка точности измерения углов по формуле (9), т. е. с использованием свободных членов условий фигур и полюсов, показала, что значение μ_{fp} больше, чем μ_f примерно на 10% (по отдельным районам от 4 до 20%). По всем районам $\mu_{fp} = \pm 0{,}968''$, а $\mu_f = \pm 0{,}880''$. Из трех исследуемых формул формула (9) должна давать наиболее объективные данные о точности выполненных измерений, так как она учитывает почти все условия, возникающие в свободной сети триангуляции.

Однако можно предположить, что и эта формула дает несколько преуменьшенное значение средней квадратической ошибки, поскольку включает среднюю квадратическую ошибку, получаемую по невязкам треугольников, а эта ошибка входит в формулу (9) с весом 2, в связи с тем, что условий фигур в сети примерно в два раза больше, чем условий полюсов. Формула (1) дает преуменьшенное значение средней квадратической ошибки (примерно на 20—30%) по сравнению со значением из уравнивания (см. таблицу, район Дальний Восток).

О предположительных причинах преуменьшенного значения μ_f мы говорили ранее. Эту же закономерность отмечает Л. Н. Келль [3]: «Важно отметить при этом, что значение μ по первой формуле (т. е. по невязкам треугольников — *С. П.*) получается всегда меньшим (иногда значительно), чем значение μ из третьей формулы» (т. е. по результатам уравнивания — *С.П.*)».

---

* По-видимому, это объясняется искусственным «улучшением» невязок фигур.

В. Г. Зданович [1] о формуле (1) пишет: «Следует также иметь в виду, что некоторое влияние на точность формулы (XV. 5) оказывает то обстоятельство, что в процессе наблюдений отбраковывают измерения, не удовлетворяющие установленным допускам. В результате этого значение μ может быть преуменьшено до 15%».

Таким образом, результаты, полученные на обширном полевом материале, подтверждают мнения известных советских геодезистов об оценке точности измеренных углов с помощью формул (1), (2) и (3).

Список литературы: 1. *Зданович В. Г. и* [*др.*]. Высшая геодезия. М., «Недра», 1970, 261 с. 2. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. М., «Недра», 1966, с. 38—39. 3. *Келль Л. Н.* Упрощенная формула оценки точности триангуляции до ее уравнивания. — «Труды ВНИМИ», 1950, № 21, с. 83—94.

Работа поступила в редколлегию 1 февраля 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.