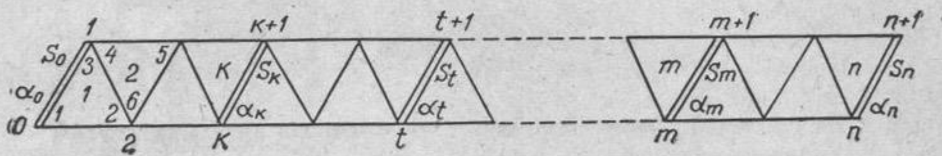
РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 18

УДК 528.32.52

П. И. ЕФИМОВ

О ПОСТРОЕНИИ И УРАВНИВАНИИ РЯДОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ТРИАНГУЛЯЦИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНО ИЗМЕРЕННЫМИ СТОРОНАМИ

1. Общие соображения и оценка точности. Ряд треугольников триангуляции продолжает оставаться наиболее распространенной типовой фигурой построения геодезического обоснования для последующих маркшейдерских и геодезических работ, связанных с проектированием, стро-



Ряд треугольников триангуляции с дополнительно измеренными сторонами.

ительством и эксплуатацией различного рода инженерных сооружений. Вместе с тем звено треугольников триангуляции является основной схемой построения государственной геодезической сети 1-го класса.

Повысить точность элементов ряда треугольников триангуляции можно, в частности, путем дополнительных измерений его связующих сторон и определением азимутов (дирекционных углов) этих сторон. Очевидно, что дополнительные линейные измерения приведут при прочих равных условиях к уменьшению в основном ошибок вычисленных длин сторон и продольного сдвига ряда, а дополнительные азимутальные определения — к уменьшению ошибок азимутов (дирекционных углов) его сторон и величины поперечного сдвига. Совместное же проведение дополнительных линейных измерений и азимутальных определений скажется положительно на повышении точности элементов ряда во всей их совокупности. Вопрос о количестве и точности дополнительных линейных измерений и азимутальных определений решается при проектировании ряда в зависимости от конкретных технических условий.

Если вес измеренного угла принять за единицу, то $P_s = \frac{m_\beta^2}{m_s^2}$ и $P_\alpha = \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2}$.

В дальнейших выводах нас будут интересовать величины, обратные весам сторон и азимутов. Обозначим их соответственно через q_s и q_α. Приняв далее, что Δ_{s_k} — изменение логарифма длины измеренной стороны при изменении длины на единицу измерения (*мм, см, дм*), а δ_{3j-2} и δ_{3j-1} — изменения логарифмов синусов связующих углов j-го треугольника при измерении их величин на 1″, введем еще такие величины:

$$\omega_{s_k} = \Delta_{s_k}^2 q_{s_k};\ \omega_{\alpha_k} = q_{\alpha_k};\ R_j = \delta_{3j-2}^2 + \delta_{3j-1}^2 + \delta_{3j-2}\delta_{3j-1}.$$

При дополнительных измерениях связующих сторон ряда и определениях их азимутов, кроме условий фигур, возникает еще λ условий сторон и λ условий азимутов (дирекционных углов), причем λ — число частей ряда, на которое он разделился в результате дополнительных линейных измерений и азимутальных определений.

Применительно к обозначениям, принятым на рисунке, указанные условные уравнения азимутов (дирекционных углов) и сторон будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(\alpha_0) + \sum_1^k \mp (3_j) - (\alpha_k) + w_{\alpha_1} = 0;\\
&(\alpha_k) + \sum_{k+1}^t \mp (3_j) - (\alpha_t) + w_{\alpha_2} = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(\alpha_m) + \sum_{m+1}^n \mp (3_j) - (\alpha_n) + W_{\alpha_\lambda} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_0 (s_0) + \sum_1^k \rho_j' - \Delta_k (s_k) + W_{s_1} = 0;\\
&\Delta_k (s_k) + \sum_{k+1}^t \rho_j' - \Delta_t (s_t) + W_{s_2} = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta_m (s_m) + \sum_{m+1}^n \rho_j' - \Delta_n (s_n) + W_{s_\lambda} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В уравнениях (1) и (2), кроме обозначений, принятых ранее, W_α и W_s — свободные члены, а $\rho_j' = \delta_{3j-2}(3_{j-2}) - \delta_{3j-1}(3_{j-1})$.

Отнесем уравнения (1) и (2) ко второй группе и припишем к ним весовые функции для вычисленной связующей стороны или ее азимута той или иной части ряда. Сделав необходимые преобразования коэффициентов условных уравнений второй группы и соответствующей весовой функции по правилу Н. А. Урмаева, получим формулы для определения величин, обратных весам, в таком виде:

$$\frac{1}{P_{\alpha_{k\,(i)}}} = \left(\omega_{\alpha_i} + \frac{2}{3}k_i\right) - \frac{\omega_{\alpha_i}^2 + \left(\omega_{\alpha_{i-1}} + \frac{2}{3}k_i\right)^2}{\omega_{\alpha_{i-1}} + \omega_{\alpha_i} + \frac{2}{3}n_i}; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{P_{\lg s_{k\,(i)}}} = \left(\omega_{s_i} + \frac{2}{3}[R]_1^k\right) - \frac{\omega_{s_i}^2 + \left(\omega_{s_{i-1}} + \frac{2}{3}[R]_1^k\right)^2}{\omega_{s_{i-1}} + \omega_{s_i} + \frac{2}{3}[R]_1^{n_i}}, \qquad (4)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, \lambda$ — части ряда, k_i — число треугольников i-й части ряда, используемых для передачи азимута или вычисления длины k-й связующей стороны, а n_i — общее число треугольников в этой части ряда.

Если принять, что ряд состоит из правильных треугольников и имеет место равенство

$$\frac{m_s}{s} = \frac{m_\beta''}{\rho''} = \frac{m_\alpha''}{\rho''}, \qquad (5)$$

то $\omega_\alpha = 1{,}0$, а $\omega_s = 4{,}5$. При этих условиях выражения (3) и (4) могут быть записаны как

$$\frac{1}{P_{\alpha_{k(i)}}} = \frac{1}{3}(3{,}0 + 2k_i) - \frac{2(k_i^2 + 3k_i + 4{,}5)}{3(3{,}0 + n_i)}; \qquad (6)$$

$$\frac{1}{P_{\lg s_{k(i)}}} = (4{,}5 + 3k_i) - \frac{3{,}0(k_i^2 + 3k_i + 4{,}5)}{3{,}0 + n_i}. \qquad (7)$$

Погрешность определения величин $\frac{1}{P}$ по формулам (3), (4), (6) и (7) зависит лишь от числа знаков после запятой, которые удерживаются при получении величин ω и R.

Заметим, что для ряда из правильных треугольников величина $\omega_s = \Delta_1^2 q_s = 4{,}5$ остается постоянной, не зависящей от длин сторон треугольника, если, конечно, сохраняется равенство (5).

Формулы (6) и (7) могут быть практически использованы во время предварительных расчетов величин средних квадратических ошибок вычисляемых сторон и их азимутов (дирекционных углов) при проектировании рядов с дополнительными линейными измерениями и азимутальными определениями.

Применим выражения (6) и (7) к ряду, состоящему из 12 треугольников в разных вариантах его структуры, при условии сохранения равенства (5), если части ряда будут с равным числом треугольников. Примем, что $s = 2$ *км* и $m_\beta = \pm 2''$. Результаты вычислений сведем в табл. 1, причем условимся, что как в этой таблице, так и в других в графе «структура ряда» под литерой *A* понимается ряд, проложенный между твердыми сторонами с твердыми их азимутами; литерой *B* — ряд, проложенный между измеренными выходными сторонами и определенными азимутами этих сторон; *C* — ряд с одной дополнительно измеренной стороной и определенным ее азимутом и, наконец, под литерой *D* — ряд с двумя дополнительно измеренными сторонами и определенными их азимутами.

Произведем расчет величин $\frac{1}{P_\alpha}$ и $\frac{1}{P_{\lg s}}$ средней стороны ряда с различным числом треугольников в нем (табл. 2).

Таблица 1

Величины $1:P_\alpha$ и $1:P_{\lg s_i}$

Структура ряда	$1:P_{\alpha_3}$	$1:P_{\alpha_6}$	$1:P_{\alpha_9}$	$1:P_{\lg s_3}$	$1:P_{\lg s_6}$	$1:P_{\lg s_9}$
A	1,50	2,00	1.50	6.75	9,00	6.75
B	2,10	2,50	2,10	9.00	11,25	9.50
C	1,30	—	1.30	6,00	—	6,00
D	0,86	0,95	0,86	3,85	4.30	3,85

Таблица 2

Обратные веса средних сторон рядов

Структура ряда	$n=16$		$n=12$		$n=8$		$n=4$	
	$1:P_\alpha$	$1:P_{\lg s}$	$1:P_\alpha$	$1:P_{\lg s}$	$1:P_\alpha$	$1:P_{\lg s}$	$1:P_\alpha$	$1:P_{\lg s}$
A	2,70	12,00	2,00	9,00	1,33	6,00	0,67	3,00
B	2,80	14,25	2,50	11,25	1,84	8,25	1,17	5,25

Данные, приведенные в табл. 1, убедительно показывают, как дополнительные измерения сторон треугольников и определение их азимутов положительно влияют на точность вычисленных сторон и азимутов этих сторон. Из табл. 2 вытекает, что даже при значительном числе треугольников в ряду пренебрегать ошибками выходных сторон и их азимутов не следует, а уравнивание таких рядов производить под условием суммы квадратов поправок во все измеренные элементы ряда. Нужно отметить, что вопрос о влиянии дополнительных линейных измерений и азимутальных определений на точность элементов ряда тесно связан с оптимальным соотношением весов производимых измерений. Вопрос этот достаточно сложен в теоретическом отношении и едва ли может быть решен в общем виде, так как указанное оптимальное соотношение весов является функцией целого ряда особенностей данного построения: количества треугольников, их формы, изломанности самого ряда. Кроме того, решение вопроса зависит и от величин заданных средних квадратических ошибок элементов ряда. Если ориентироваться на получение минимальных и примерно равных между собой величин поперечного и продольного сдвигов ряда, то близким к оптимальному соотношению весов будут их величины, определяемые равенством (5).

Ходовую линию для передачи координат наметим через вершины промежуточных углов ряда и весовые функции координат последней $(n+1)$-й вершины ряда запишем так:

$$\begin{aligned} f_{x_{n+1}} = {} & 2{,}30\cdot 10^{6}\cdot s\,\{(x_n - x_0)\,\Delta_0(s_0) + 2{,}1\,(Y_n - Y_0)(\alpha_0) + \\ & + [1{,}2\,(x_n - x)(3j-2)]_{n-1}^{1} - [1{,}2\,(x_n - x)(3j-1)]_{n-1}^{1} + \\ & + [-2{,}1\,(Y_n - Y)(\mp 3j)]_{n-1}^{1} + (x_{n+1} - x_n)\,\Delta_n(s_n) + 2{,}1\,(Y_{n+1} - Y_n)(\alpha_n)\}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f_{y_{n+1}} = {} & 2{,}30\cdot 10^{6}\cdot s\,\{(Y_n - Y_0)\,\Delta_0(s_0) + 2{,}1\,(x_n - x_0)(\alpha_0) + \\ & + [1{,}2\,(Y_n - Y)(3j-2)]_{n-1}^{1} - [1{,}2\,(Y_n - Y)(3j-1)]_{n-1}^{1} + \\ & + [2{,}1\,(x_n - x)(\mp 3j)]_{n-1}^{1} + 2{,}1\,(x_{n+1} - x_n)(\alpha_n) + (Y_{n+1} - Y_n)\,\Delta_n(s_n)\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Следует иметь в виду, что при составлении выражений (8) и (9) для данного конкретного ряда начало каждой измеренной стороны служит конечной вершиной предыдущей части ходовой линии и началом следующей ее части. При этом связующие углы последнего треугольника каждой части ряда или треугольника, примыкающего к очередной измерéнной стороне ряда, не будут принимать участие в образовании весовых функций координат его конечной вершины, а промежуточные углы соответствующих треугольников (в случае определения азимутов сторон) также не будут учитываться при их составлении.

Присоединим выражения (8) и (9) к условным уравнениям (1) и (2) и используем метод уравнивания в двух группах. Тогда при наличии в ряду дополнительных линейных измерений и азимутальных определений для ряда из правильных треугольников с неощутимой потерей точности при вычислениях за счет округления цифровых коэффициентов получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{x_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = Q\Bigg\{ & \sum_{i=1}^{i=\lambda} 0{,}125\,(2n_i^3 - 3n_i^2 + 10\,n_i) + 1{,}125\,\omega_\alpha \sum_{i=1}^{i=\lambda} n_i^2 - \\ & - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{1{,}7\,n_i^2}{3n_i + 2\omega_s} - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{3\,[0{,}35\,n_i\,(n_i - 1) + 1{,}05\,\omega_\alpha n_i]^2}{2n_i + 6\omega_\alpha} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{y_{n+1}}} = \frac{1}{P_{t_{n+1}}} = Q\Bigg\{ & \sum_{i=1}^{i=\lambda} 0{,}125\,(2n_i^3 - 3n_i^2 + 10\,n_i) + 0{,}25\,\omega_s \sum_{i=1}^{i=\lambda} n_i^2 - \\ & - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{[0{,}75\,n_i\,(n_i - 1) + 2{,}25\,\omega_s n_i]^2}{3n_i + 2\omega_s} - \sum_{i=1}^{i=\lambda} \frac{1{,}125\,n_i^2}{2n_i + 6\omega_\alpha} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $Q = 5{,}30\cdot 10^{-12}\cdot s^2$ (s, *м*).

Средние квадратические ошибки m_x и m_y, или ошибки соответственно поперечного и продольного сдвигов ряда, будем вычислять по формулам

$$m_{x_{n+1}} = m_{u_{n+1}} = \mp \mu \sqrt{\frac{1}{P_{x_{n+1}(u)}}} \text{ и } m_{y_{n+1}} = m_{t_{n+1}} = \pm \mu \sqrt{\frac{1}{P_{y_{n+1}(t)}}}. \quad (12)$$

Применим формулы (10), (11) и (12) к рядам с разным количеством треугольников и при различных их структурах — $s=20$ *км*, $m_\beta = \pm 0{,}7$ при сохранении зависимости между весами согласно (5).

Результаты вычислений сведем в табл. 3.

Таблица 3

Величины m_u, m_t и M рядов треугольников, м

Структура ряда	$n=16$			$n=12$			$n=8$		
	m_u	m_t	M	m_u	m_t	M	m_u	m_t	M
	±	±	±	±	±	±	±	±	±
A	0,50	0,50	0,71	0,35	0,35	0,50	0,22	0,22	0,31
B	0,66	0,65	0,93	0,45	0,48	0,66	0,28	0,28	0,40
C	0,39	0,40	0,56	0,32	0,29	0,43	0,22	0,18	0,28
D	0,35	0,34	0,49	0,25	0,22	0,33	0,19	0,17	0,25

Если в ряду будут дополнительно измерены только связующие стороны без определений их азимутов, то из формул (10) и (11) исключаются последние их члены, стоящие в фигурных скобках; при дополнительных же определениях только азимутов сторон — третьи члены. И, наконец, если ряд будет уравниваться только под условием минимума суммы квадратов поправок в углы и рассматриваться как ряд между двумя твердыми сторонами с твердыми азимутами, то указанные выше равенства могут быть приведены к такому простому виду:

$$\frac{1}{P_{y_{n+1}}} = \frac{1}{P_{t_{n+1}}} = \frac{1}{P_{x_{n+1}}} = \frac{1}{P_{u_{n+1}}} = \frac{1}{3} s^2 \cdot 10^{-12} (n_3 + 8n), \quad (13)$$

где s — длина стороны треугольника (в *м*), а n — число треугольников в ряду.

2. Уравнивание рядов с дополнительно измеренными связующими сторонами и определенными азимутами этих сторон. Если предположить, например, что мы имеем ряд треугольников, в котором кроме азимутов выходных сторон определены азимуты еще нескольких связующих его сторон, то нормальные уравнения коррелат, соответствующие условным уравнениям вида (1), будут такими:

$$\left.\begin{aligned} &[q\alpha\alpha] K_1 + [q\alpha\beta] K_2 + [q\alpha\gamma] K_3 + \ldots + [q\alpha\lambda] K_\lambda + W_{\alpha_1} = 0; \\ &[q\alpha\beta] K_1 + [q\beta\beta] K_2 + [q\beta\gamma] K_3 + \ldots + [q\beta\lambda] K_\lambda + W_{\alpha_2} = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[q\alpha\lambda] K_1 + [q\beta\lambda] K_2 + [q\gamma\lambda] K_3 + \ldots + [q\lambda\lambda] K_\lambda + W_{\alpha_\lambda} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ — преобразованные коэффициенты уравнений второй группы, а $W_{\alpha_1}, W_{\alpha_2}, \ldots, W_{\alpha_\lambda}$ — свободные члены, вычисленные по углам, исправленным первыми поправками.

Квадратичные члены уравнений (14) определяются из выражений:

$$[q\alpha\alpha] = \omega_{\alpha_0} + \omega_{\alpha_1} + \frac{2}{3} n_1 = Q_{\alpha_1};$$

$$[q\beta\beta] = \omega_{\alpha_1} + \omega_{\alpha_2} + \frac{2}{3} n_2 = Q_{\alpha_2};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[q\lambda\lambda] = \omega_{\alpha_{\lambda-1}} + \omega_{\alpha_\lambda} + \frac{2}{3} n_\lambda = Q_{\alpha_\lambda}.$$

Неквадратичные члены вида $[q\alpha\beta]$, $[q\beta\gamma]$, ..., $[q(\lambda-1)\lambda]$ будут равны ω_{α_i}, а вида $[q\alpha\gamma]$, $[q\beta\delta]$, ..., $[q(\lambda-2)\lambda]$ — нулю.

В принятых обозначениях уравнения (14) запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} Q_{\alpha_1} K_1 - \omega_{\alpha_1} K_2 + 0 \cdot K_3 + W_{\alpha_1} = 0; \\ -\omega_{\alpha_1} K_1 + Q_{\alpha_2} K_2 - \omega_{\alpha_2} K_3 + 0 \cdot K_4 + W_{\alpha_2} = 0; \\ 0 \cdot K_1 - \omega_{\alpha_2} K_2 + Q_{\alpha_3} K_3 - \omega_{\alpha_3} K_4 + W_{\alpha_3} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\omega_{\alpha_{\lambda-2}} K_{\lambda-1} + Q_{\alpha_\lambda} K_\lambda + W_{\alpha_\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Если рассматривать ряд треугольников, в котором кроме выходных сторон измерены еще несколько связующих, то, очевидно, нормальные уравнения коррелят, соответствующие условным уравнениям (2), получим в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} Q_{s_1} K_1 - \omega_{s_1} K_2 + 0 \cdot K_3 + W_{s_1} = 0; \\ -\omega_{s_1} K_1 + Q_{s_2} K_2 - \omega_{s_2} K_3 + 0 \cdot K_4 + W_{s_2} = 0; \\ 0 \cdot K_1 - \omega_{s_2} K_2 + Q_{s_3} K_3 - \omega_{s_3} K_4 + W_{s_3} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\omega_{s_{\lambda-2}} K_{\lambda-1} + Q_{s_\lambda} K_\lambda + W_{s_\lambda} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

где $Q_{s_i} = \omega_{s_{i-1}} + \omega_{s_i} + \frac{2}{3}[R]_i$.

Таким образом, определив в ряду треугольников, построенном на одной выходной стороне, только азимуты его выходных сторон и нескольких связующих или измерив выходные стороны и несколько связующих при наличии азимута одной выходной стороны, мы получаем довольно элементарную систему нормальных уравнений коррелат, составление и решение которой не представляет трудностей.

Значительное упрощение вычислений при небольшом количестве частей ряда может быть достигнуто за счет готовых (стандартных) формул для вычисления коррелат (табл. 4).

При наличии же в данном ряду дополнительно измеренных связующих сторон с определением их азимутов объем вычислений, связанных с составлением и решением нормальных уравнений, непрерывно возрастает с увеличением частей ряда. Поэтому для уравнивания таких рядов можно рекомендовать трехгрупповой метод с отнесением в первую группу условных уравнений фигур, во вторую — азимутов (дирекционных углов) и в третью — сторон. Этот метод уравнивания позволит, в частности, использовать указанные выше готовые формулы для вычисления коррелат, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

Стандартные формулы для вычисления коррелат

Структура ряда	$K_1(\alpha, s)$	$K_2(\alpha, s)$	$K_3(\alpha, s)$	Контрольная формула для K_1
Между двумя выходными сторонами (B)	$-\frac{W_1}{Q_1}$	—	—	—
Ряд разделен на две части (C)	$\frac{Q_2K_2+W_2}{\omega_1}$	$\frac{Q_1W_2+\omega_1W_1}{Q_1Q_2-\omega_1^2}$	—	$\frac{\omega_1K_2-W_1}{Q_1}$
Ряд разделен на три части (D)	$\frac{Q_2K_2-\omega_2K_3+W_2}{\omega_1}$	$\frac{Q_3K_3+W_2}{\omega_2}$	$-\frac{Q_1Q_2W_3+\omega_1\omega_2W_1+Q_1\omega_2W_2-\omega_1^2W_3}{Q_1Q_2Q_3-Q_1\omega_2^2-Q_3\omega_1^2}$	$\frac{\omega_1K_2-W_1}{Q_1}$
	$Q_{\alpha_i}=\omega_{\alpha_{i-1}}+\omega_{\alpha_i}+\frac{2}{3}n_i$		$Q_{s_i}=\omega_{s_{i-1}}+\omega_{s_i}+\frac{2}{3}[R]_i$	

Таблица 5

Поправки в углы треугольников

№ углов	Измеренные и приведенные на плоскость углы	Поправки в углы				№ углов	Измеренные и приведенные на плоскость углы	Поправки в углы			
		A	B	C	D			A	B	C	D
7	70°14′12″,38	−0″,92	−1″,17	−1″,23	−1″,21	16	65°58′55″,17	−0″,10	−0″,09	+0″,03	−0″,01
8	52 05 01 ,63	−0 ,27	−0 ,36	−0 ,14	−0 ,18	17	67 40 59 ,16	+0 ,43	+0 ,41	+0 ,66	+0 ,61
9	57 40 48 ,11	−0 ,93	−0 ,59	−0 ,75	−0 ,73	18	46 20 04 ,94	+0 ,40	+0 ,41	+0 ,04	+0 ,13
	$W_\beta=+2'',12$						$W_\beta=-0'',73$				

Метод уравнивания в трех группах достаточно хорошо известен. Дадим без соответствующих выводов формулы для преобразования коэффициентов условных уравнений третьей группы (сторон):

$$
\begin{aligned}
A_{3j-2} &= \delta_{3j-2} - \frac{1}{3}\rho_j - \frac{1}{6n_i}\sum_1^{n_i}\rho_j, \\
A_{3j-1} &= -\delta_{3j-1} - \frac{1}{3}\rho_j - \frac{1}{6n_i}\sum_1^{n_i}\rho_j, \\
A_{3j} &= -\frac{1}{3n_i}\sum_1^{n_i}\rho_j - \frac{1}{3}\rho_j,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $\rho_j = \delta_{3j-2} - \delta_{3j-1}$.

Таким образом, при уравнивании рядов с дополнительно измеренными связующими сторонами и определенными их азимутами (дирекционными углами) нужно свойственные данной структуре ряда условные уравнения разделить на три группы. Определение величин поправок в углы производится в обычном порядке: первые поправки равны одной третьей части угловой невязки в треугольнике, а вторые и третьи вычисляются через соответствующие коррелаты (K_α и K_s). Что касается вычисления поправок в определенные азимуты (дирекционные углы), то для выходных сторон они будут $v_{\alpha_0} = q_{\alpha_0} K_{\alpha_1}$ и $v_{\alpha_n} = -q_{\alpha_n} K_{\alpha_n}$, а для общих (смежных) сторон частей ряда — $v_{\alpha_i} = q_{\alpha_{i-1}} K_{\alpha_i} - q_{\alpha_i} K_{\alpha_{i+1}}$. Поправки в выходные стороны вычисляются по формулам

$$v_{s_0} = q_{s_0} \Delta_0 K_{s_1} \text{ и } v_{s_n} = -q_{s_n} \Delta_n K_{sn},$$

а в смежные стороны

$$v_{s_i} = q_{si-1} \Delta_{si-1} K_{s_i} - q_{s_i} \Delta_{s_i} K_{si+1}.$$

Все приведенные соображения по методу уравнивания рядов в разных их структурах и соответствующие расчетные формулы могут найти практическое применение при построении и модернизации государственной опорной геодезической сети.

Изложенный метод практически применен при уравнивании звена 1-го класса, состоящего из 12 треугольников в четырех вариантах его структуры (A, B, C, D). Здесь не даются полностью результаты уравнительных вычислений. Для иллюстрации же изменения величин поправок в углы треугольников ряда при уравнивании его в указанных выше вариантах в табл. 5 приведены данные по двум треугольникам.

Отметим, что средние квадратические ошибки единицы веса по результатам уравнивания получились такими: $\mu_A = \pm 0{,}80$; $\mu_B = \pm 0{,}88$; $\mu_C = \pm 0{,}91$ и $\mu_D = \pm 0{,}94$.

Работа поступила в редколлегию 15 мая 1972 года. Рекомендована кафедрой геодезии и маркшейдерского дела Криворожского горнорудного института.