РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 18

УДК 528.143:528.335

Б. П. КВАСНЮК

УРАВНИВАНИЕ СЕТЕЙ ТРИЛАТЕРАЦИИ, НЕ ИМЕЮЩИХ ИСХОДНЫХ СТОРОН, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТИПОВОГО УСЛОВНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [2] предложен прием составления типовых условных уравнений для систем трилатерации, которые имеют исходные (не получающие поправок из уравнивания) стороны и исходные дирекционные углы, вычисленные по координатам исходных пунктов. Коэффициенты типовых условных уравнений образуются по единым простым правилам. Предложены также формулы для вычисления поправок координат определяемых пунктов, что избавляет от необходимости окончательного вычисления сети по уравненным значениям сторон. Условные уравнения и формулы для вычисления поправок координат определяемых пунктов можно записать, пользуясь схемой сети и механическими правилами.

Мы ставили своей задачей получить формулы типовых условных уравнений и поправок приближенных координат определяемых пунктов сетей трилатерации, в которых заданы исходные дирекционные углы измеренных сторон. Будем рассматривать случаи, когда имеются дирекционные углы сторон, идущих от исходных пунктов трилатерации.

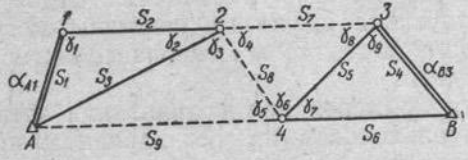

Рис. 1. Цепь треугольников, опирающаяся на исходные пункты и дирекционные углы.

Пусть в цепи плоских треугольников (рис. 1) A и B — исходные пункты, α_{A1} и α_{B3} — исходные дирекционные углы. Если приближенные координаты пунктов *1* и *2* вычислять по длинам сторон s_1, s_2, s_3, а по длинам s_4, s_5 и s_6 — приближенные координаты пунктов *3* и *4*, то измеренные стороны s_7, s_8 и s_9 будут избыточными. Запишем уравнения поправок измеренных сторон:

$$\begin{aligned}
v_1&=\cos\alpha_{A1}\cdot\delta x_1+\sin\alpha_{A1}\cdot\delta y_1,\\
v_2&=\cos\alpha_{12}\cdot\delta x_2+\sin\alpha_{12}\cdot\delta y_2-\cos\alpha_{12}\cdot\delta x_1-\sin\alpha_{12}\cdot\delta y_1,\\
v_3&=\cos\alpha_{A2}\cdot\delta x_2+\sin\alpha_{A2}\cdot\delta y_2,\\
v_4&=\cos\alpha_{B3}\cdot\delta x_3+\sin\alpha_{B3}\cdot\delta y_3,\\
v_5&=\cos\alpha_{34}\cdot\delta x_4+\sin\alpha_{34}\cdot\delta y_4-\cos\alpha_{34}\cdot\delta x_3-\sin\alpha_{34}\cdot\delta y_3,\\
v_6&=\cos\alpha_{B4}\cdot\delta x_4+\sin\alpha_{B4}\cdot\delta y_4,\\
v_7&=\cos\alpha_{23}\cdot\delta x_3+\sin\alpha_{23}\cdot\delta y_3-\cos\alpha_{23}\cdot\delta x_2-\sin\alpha_{23}\cdot\delta y_2+l_7,\\
v_8&=\cos\alpha_{24}\cdot\delta x_4+\sin\alpha_{24}\cdot\delta y_4-\cos\alpha_{24}\cdot\delta x_2-\sin\alpha_{24}\cdot\delta y_2+l_8,\\
v_9&=\cos\alpha_{A4}\cdot\delta x_4+\sin\alpha_{A4}\cdot\delta y_4+l_9,
\end{aligned}\tag{1}$$

где $l_i = s_{0i} - s_i$; α_{ik} — дирекционный угол направления; s_{0i} — значение стороны, вычисленное по приближенным координатам пунктов; s_i — измеренное значение стороны.

Так как исходные дирекционные углы α_{A1} и α_{B3} не подлежат изменению, то поправки координат определяемых пунктов *1* и *3* должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\sin \alpha_{A1} \cdot \delta x_1 - \cos \alpha_{A1} \cdot \delta y_1 = 0, \\ &\sin \alpha_{B3} \cdot \delta x_3 - \cos \alpha_{B3} \cdot \delta y_3 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решая первые уравнения из (1) и (2), а также четвертое из (1) и второе из (2), находим:

$$\begin{aligned} &\delta x_1 = \cos \alpha_{A1} \cdot v_1, \quad \delta x_3 = \cos \alpha_{B3} \cdot v_4, \\ &\delta y_1 = \cos \alpha_{A1} \cdot v_1, \quad \delta y_3 = \sin \alpha_{B3} \cdot v_4. \end{aligned} \tag{3}$$

Затем, решая попарно второе и третье, пятое и шестое уравнения (1) с учетом (3), имеем

$$\begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{-\sin \alpha_{A2}(v_2 - v_1 \cdot \cos \gamma_1) + \sin \alpha_{12} \cdot v_3}{\sin \gamma_2}, \\ \delta y_2 &= \frac{\cos \alpha_{A2}(v_2 - v_1 \cdot \cos \gamma_1) - \cos \alpha_{12} \cdot v_3}{\sin \gamma_2}, \\ \delta x_4 &= \frac{\sin \alpha_{B4}(v_5 - v_4 \cos \gamma_9) - \sin \alpha_{34} \cdot v_6}{\sin \gamma_7}, \\ \delta y_4 &= \frac{-\cos \alpha_{B4}(v_5 - v_4 \cdot \cos \gamma_9) + \cos \alpha_{34} \cdot v_6}{\sin \gamma_7}. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставив значения поправок координат из (3) и (4) в седьмое, восьмое и девятое уравнения (1), получим условные уравнения, соответствующие избыточно измеренным сторонам:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(\gamma_3 + \gamma_4)}{\sin \gamma_2} \cdot \cos \gamma_1 \cdot v_1 - \frac{\sin(\gamma_3 + \gamma_4)}{\sin \gamma_2} \cdot v_2 + \frac{\sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)}{\sin \gamma_2} \cdot v_3 + \\ &\qquad + \cos(\gamma_8 + \gamma_9) \cdot v_4 - v_7 + l_7 = 0, \\ &\frac{\sin \gamma_3}{\sin \gamma_2} \cdot \cos \gamma_1 \cdot v_1 - \frac{\sin \gamma_3}{\sin \gamma_2} \cdot v_2 + \frac{\sin(\gamma_2 + \gamma_3)}{\sin \gamma_2} \cdot v_3 - \frac{\sin(\gamma_6 + \gamma_7)}{\sin \gamma_7} \cdot \cos \gamma_9 \cdot v_4 + \\ &\qquad + \frac{\sin(\gamma_6 + \gamma_7)}{\sin \gamma_7} \cdot v_5 - \frac{\sin \gamma_6}{\sin \gamma_7} \cdot v_6 - v_8 + l_8 = 0, \\ &- \frac{\sin(\gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7)}{\sin \gamma_7} \cdot \cos \gamma_9 \cdot v_4 + \frac{\sin(\gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7)}{\sin \gamma_7} \cdot v_5 - \\ &\qquad - \frac{\sin(\gamma_5 + \gamma_6)}{\sin \gamma_7} \cdot v_6 - v_9 + l_9 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В условных уравнениях (5) коэффициенты при поправках сторон s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8 и s_9 образуются по известным правилам [2].

В образовании коэффициентов при поправках сторон, имеющих исходные дирекционные углы, принимают участие как синусы, так и косинусы углов при определяемых пунктах. Формулы (3) и (4) для вычисления поправок координат тоже имеют свои особенности.

Чтобы установить закономерности, рассмотрим и другие схемы трилатерации. При этом, опуская выводы, приведем только условные уравнения и формулы для вычисления поправок координат. Для цепи треугольников с общей вершиной и замкнутой диагональю (рис. 2) с исходным пунктом A и исходными дирекционными углами α_{A1} и α_{A3} для избыточно измеренных сторон s_7 и s_8 условные уравнения запишутся как

$$\cos\gamma_1\cdot v_1+\cos\gamma_8\cdot v_4-v_7+l_7=0,$$

$$\frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)\cdot v_1-\frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot v_2+\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_3}\cdot v_3+$$

$$+\frac{\sin\gamma_5}{\sin\gamma_3}\cdot\cos(\gamma_7+\gamma_8)\cdot v_4-\frac{\sin\gamma_5}{\sin\gamma_6}\cdot v_5+\frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot v_6-v_8+l_8=0. \quad (6)$$

Поправки координат пунктов *1, 2, 3* и *4* вычисляются по формулам:

$$\delta x_1=\cos\alpha_{A1}\cdot v_1, \qquad \delta x_3=\cos\alpha_{A3}\cdot v_4,$$

$$\delta y_1=\sin\alpha_{A1}\cdot v_1, \qquad \delta y_3=\sin\alpha_{A3}\cdot v_4,$$

$$\delta x_2=\frac{-\sin\alpha_{A2}\,[v_2-v_1\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)]+\sin\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3},$$

$$\delta y_2=\frac{\cos\alpha_{A2}\,[v_2-v_1\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)]-\cos\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3}, \quad (7)$$

$$\delta x_4=\frac{\sin\alpha_{A4}\,[v_5-v_4\cdot\cos(\gamma_7+\gamma_8)]-\sin\alpha_{34}\cdot v_6}{\sin\gamma_6},$$

$$\delta y_4=\frac{-\cos\alpha_{A4}\,[v_5-v_4\cdot\cos(\gamma_7+\gamma_8)]+\cos\alpha_{34}\cdot v_6}{\sin\gamma_6}.$$

Из условных уравнений (5) и (6) видно, что коэффициенты при поправках сторон, имеющих исходные дирекционные углы, образуются по единому правилу.

Коэффициент при поправке v_k стороны s_k с исходным дирекционным углом α_{Mn} (M — исходный, n — определяемый пункт) в данном услов-

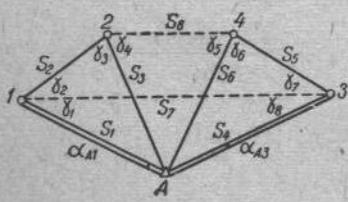

Рис. 2. Вставка в жесткий угол цепи треугольников, замкнутой диагональю.

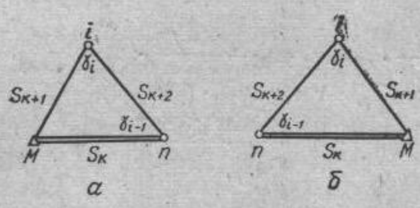

Рис. 3, *а*. Вычисление поправок координат, если $\alpha_{iM}>\alpha_{in}$.
Рис. 3, *б*. Вычисление поправок координат, если $\alpha_{iM}<\alpha_{in}$.

ном уравнении равен произведению коэффициента при поправке v_{k+2} стороны s_{k+2}, идущей с определяемого пункта n, в том же условном уравнении на минус косинус угла γ_{i-1} между сторонами s_k и s_{k+2} (рис. 3, *а, б*).

Так, коэффициент при поправке v_1 в первом и втором условных уравнениях (5) получается как произведение коэффициента при поправке v_2 в тех же уравнениях на минус $\cos\gamma_1$ (см. рис. 1), а во втором уравнении (6) — на минус $\cos(\gamma_1+\gamma_2)$ (см. рис. 2). Коэффициенты при поправке v_4 во втором и третьем уравнениях (5) и втором уравнении (6) равны произведению коэффициентов при поправке v_5 на минус косинус угла между сторонами s_4 и s_5. Коэффициентами при поправке v_4 в первом уравнении (5) и при поправках v_1 и v_4 в первом уравнении (6) являются косинусы углов со знаком плюс между стороной s_4 (см. рис. 1) и s_1 и s_4 (см. рис. 2) и избыточной стороной s_7, потому что коэффициент при поправке избыточной стороны равен минус единице.

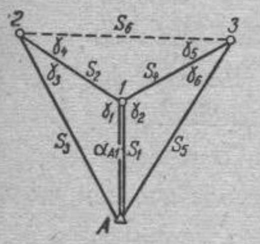

Рис. 4. Центральная система.

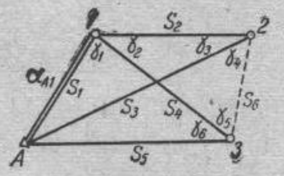

Рис. 5. Геодезический четырехугольник.

Формулы для вычисления поправок координат определяемых пунктов (3), (4) и (7) также подчинены единым правилам. Поправки координат определяемого пункта, который лежит на конце стороны, имеющей исходный дирекционный угол, равны произведению поправки этой стороны на косинус дирекционного угла (поправка абсцисс) или синус дирекционного угла (поправка ординат) направления с исходного пункта на определяемый. Формулы для вычисления поправок координат пунктов, приближенные координаты которых находятся из решения одного треугольника (пункты *2* и *4*, см. рис. 1 и 2), можно записать в общем виде:

а) если $\alpha_{iM}>\alpha_{in}$ (рис. 3, *а*):

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \frac{\sin\alpha_{Mi}(v_{k+2}-v_k\cdot\cos\gamma_{i-1})-\sin\alpha_{ni}\cdot v_{k+1}}{\sin\gamma_i},\\ \delta y_i &= \frac{-\cos\alpha_{Mi}(v_{k+2}-v_k\cdot\cos\gamma_{i-1})+\cos\alpha_{ni}\cdot v_{k+1}}{\sin\gamma_i};\end{aligned}\qquad(8)$$

б) если $\alpha_{iM}<\alpha_{in}$ (рис. 3, *б*):

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \frac{-\sin\alpha_{Mi}(v_{k+2}-v_k\cdot\cos\gamma_{i-1})+\sin\alpha_{ni}\cdot v_{k+1}}{\sin\gamma_i},\\ \delta y_i &= \frac{\cos\alpha_{Mi}(v_{k+2}-v_k\cdot\cos\gamma_{i-1})-\cos\alpha_{ni}\cdot v_{k+1}}{\sin\gamma_i}.\end{aligned}\qquad(9)$$

Приведем формулы условных уравнений и поправок координат определяемых пунктов и для других систем трилатерации. Так, в центральной системе (рис. 4) избыточно измеренной стороне s_6 соответствует условное уравнение

$$-\left[\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_3}\cdot\cos\gamma_1+\frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot\cos\gamma_2\right]\cdot v_1+\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_3}\cdot v_2-$$

$$-\frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot v_3+\frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot v_4-\frac{\sin\gamma_5}{\sin\gamma_6}\cdot v_5-v_6+l_6=0.\qquad(10)$$

Поправки координат пунктов *1, 2, 3* вычисляются по формулам:

$$\delta x_1 = \cos\alpha_{A1}\cdot v_1, \qquad \delta y_1 = \sin\alpha_{A1}\cdot v_1,$$

$$\delta x_2 = \frac{\sin\alpha_{A2}(v_2 - v_1\cdot\cos\gamma_1) - \sin\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3},$$

$$\delta y_2 = \frac{-\cos\alpha_{A2}(v_2 - v_1\cdot\cos\gamma_1) + \cos\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3}, \tag{11}$$

$$\delta x_3 = \frac{-\sin\alpha_{A3}(v_4 - v_1\cdot\cos\gamma_2) + \sin\alpha_{13}\cdot v_5}{\sin\gamma_6},$$

$$\delta y_3 = \frac{\cos\alpha_{A3}(v_4 - v_1\cdot\cos\gamma_2) - \cos\alpha_{13}\cdot v_5}{\sin\gamma_6}.$$

Условное уравнение для стороны s_6 в геодезическом четырехугольнике (рис. 5) имеет вид:

$$\left[\frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2) - \frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot\cos\gamma_1\right]\cdot v_1 - \frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot v_2 +$$
$$+\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_3}\cdot v_3 + \frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot v_4 - \frac{\sin\gamma_5}{\sin\gamma_6}\cdot v_5 - v_6 + l_6 = 0. \tag{12}$$

Поправки координат пунктов *1, 2, 3* вычисляются по формулам:

$$\delta x_1 = \cos\alpha_{A1}\cdot v_1, \qquad \delta y_1 = \sin\alpha_{A1}\cdot v_1,$$

$$\delta x_2 = \frac{-\sin\alpha_{A2}[v_2 - v_1\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)] + \sin\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3},$$

$$\delta y_2 = \frac{\cos\alpha_{A2}[v_2 - v_1\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)] - \cos\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_3}, \tag{13}$$

$$\delta x_3 = \frac{-\sin\alpha_{A3}(v_4 - v_1\cdot\cos\gamma_1) + \sin\alpha_{13}\cdot v_5}{\sin\gamma_6},$$

$$\delta y_3 = \frac{\cos\alpha_{A3}(v_4 - v_1\cdot\cos\gamma_1) - \cos\alpha_{13}\cdot v_5}{\sin\gamma_6}.$$

В цепи треугольников с общей вершиной и замкнутой диагональю (рис. 6) условное уравнение (для стороны s_8) запишется:

$$\left[\frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2) - \frac{\sin(\gamma_7+\gamma_8)\cdot\sin\gamma_5}{\sin\gamma_8\cdot\sin\gamma_6}\cdot\cos\gamma_1\right]\cdot v_1 - \frac{\sin\gamma_4}{\sin\gamma_3}\cdot v_2 +$$
$$+\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_4)}{\sin\gamma_3}\cdot v_3 + \frac{\sin(\gamma_7+\gamma_8)\cdot\sin\gamma_5}{\sin\gamma_8\cdot\sin\gamma_6}\cdot v_4 - \frac{\sin\gamma_7\cdot\sin\gamma_5}{\sin\gamma_8\cdot\sin\gamma_6}\cdot v_5 -$$
$$-\frac{\sin\gamma_5}{\sin\gamma_6}\cdot v_6 + \frac{\sin(\gamma_5+\gamma_6)}{\sin\gamma_6}\cdot v_7 - v_8 + l_8 = 0. \tag{14}$$

Поправки координат определяемых пунктов *1, 2* и *3* вычисляются по формулам (13). Равенства для вычисления поправок координат пункта *4* имеют вид:

$$\delta x_4 = \frac{-\sin\alpha_{34}\cdot v_7 + \sin\alpha_{A4}(v_6 + \cos\alpha_{34}\cdot\delta x_3 + \sin\alpha_{34}\cdot\delta y_3)}{\sin\gamma_6},$$

$$\delta y_4 = \frac{\cos\alpha_{34}\cdot v_7 - \cos\alpha_{A4}(v_6 + \cos\alpha_{34}\cdot\delta x_3 + \sin\alpha_{34}\cdot\delta y_3)}{\sin\gamma_6}. \tag{15}$$

В цепи треугольников (рис. 7) возникают два условных уравнения (избыточные стороны s_6 и s_7):

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\cdot v_1 - v_6 + l_6 = 0,$$

$$-\left[\frac{\sin(\gamma_3+\gamma_5)\cdot\sin\gamma_7}{\sin\gamma_4\cdot\sin\gamma_6}\cdot\cos\gamma_1+\frac{\sin(\gamma_6+\gamma_7)}{\sin\gamma_6}\cdot\cos(\gamma_1+\gamma_2)\right]\cdot v_1+$$

$$+\frac{\sin(\gamma_4+\gamma_5)\cdot\sin\gamma_7}{\sin\gamma_4\cdot\sin\gamma_6}\cdot v_2-\frac{\sin\gamma_5\cdot\sin\gamma_7}{\sin\gamma_4\cdot\sin\gamma_6}\cdot v_3+$$

$$+\frac{\sin(\gamma_6+\gamma_7)}{\sin\gamma_6}\cdot v_4-\frac{\sin\gamma_7}{\sin\gamma_6}\cdot v_5 - v_7 + l_7 = 0. \qquad (16)$$

Поправки координат пунктов *1* и *2* определяются формулами:

$$\delta x_1 = \cos\alpha_{A1}\cdot v_1, \qquad \delta y_1 = \sin\alpha_{A1}\cdot v_1,$$

$$\delta x_2 = \frac{\sin\alpha_{A2}(v_2 - v_1\cdot\cos\gamma_1) - \sin\alpha_{12}\, v_3}{\sin\gamma_4}, \qquad (17)$$

$$\delta y_2 = \frac{-\cos\alpha_{A2}(v_2 - v_1\cdot\cos\gamma_1) + \cos\alpha_{12}\cdot v_3}{\sin\gamma_4}.$$

Поправки координат пункта *3* вычисляются по формулам:

$$\delta x_3 = \frac{\sin\alpha_{23}(v_4+\cos\alpha_{13}\cdot\delta x_1+\sin\alpha_{13}\cdot\delta y_1)-\sin\alpha_{13}(v_5+\cos\alpha_{23}\cdot\delta x_2+\sin\alpha_{23}\cdot\delta y_2)}{\sin\gamma_6},$$

$$(18)$$

$$\delta y_3 = \frac{-\cos\alpha_{23}(v_4+\cos\alpha_{13}\cdot\delta x_1+\sin\alpha_{13}\cdot\delta y_1)+\cos\alpha_{13}(v_5+\cos\alpha_{23}\cdot\delta x_2+\sin\alpha_{23}\cdot\delta y)_2}{\sin\gamma_6}.$$

В условных уравнениях (10), (12), (14) и во втором условном уравнении (16) коэффициент при поправке стороны s_1 состоит из двух слагаемых. Это обусловлено тем, что он образуется из коэффициентов при поправках двух сторон (s_2 и s_4), идущих с определяемого пункта *1* (см.

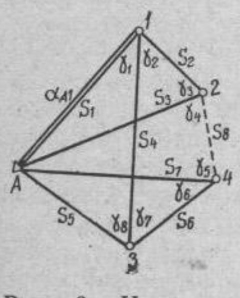

Рис. 6. Цепь треугольников с общей вершиной, замкнутая диагональю.

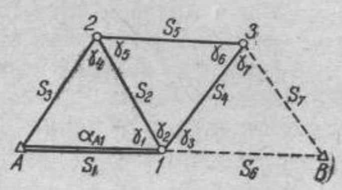

Рис. 7. Цепь треугольников, опирающаяся на исходные пункты.

рис. 4, 5, 6 и 7): коэффициенты при поправках сторон s_2 и s_4 в каждом уравнении умножаются на косинус угла (со знаком минус) между данной стороной и стороной s_1 и затем берется алгебраическая сумма произведений.

Коэффициент при поправке v_k стороны s_k, которая имеет исходный дирекционный угол α_{Mn} (M — исходный, n — определяемый пункт), в каждом условном уравнении вычисляется как алгебраическая сумма произведений коэффициентов при поправках r-го числа сторон, идущих с определяемого пункта n, в том же условном уравнении на косинусы соответствующих углов (со знаком минус).

Поправки координат пункта *4* (см. рис. 6) и пункта *3* (см. рис. 7) определяют, исходя из поправок координат предшествующих пунктов и поправок сторон, соединяющих данный пункт с двумя предшествующими (формулы (15) и (18)). На такую зависимость указывалось ранее [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Полевой В. А. Математическая обработка результатов радиогеодезических измерений. М., «Недра», 1971.
2. Терпугов К. Н., Гордеев Ю. А. Уравнивание линейных триангуляций по методу условий с использованием типового условного уравнения и механических правил. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, № 4, 1961.
3. Терпугов К. Н. Об уравновешивании свободных фигур трилатерации. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, № 1, 1967.

Работа поступила в редколлегию 3 апреля 1972 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.