РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1973 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 18

УДК 528.22:531.26

М. И. МАРЫЧ

О ВЫЧИСЛЕНИИ УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА НА ФИЗИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

В методе Молоденского изучения фигуры Земли определяемыми величинами являются высоты квазигеоида и уклонения отвеса. Эти основные элементы находят с помощью возмущающего потенциала. Исследования [1, 2] показывают, что поправки Молоденского к его нулевому приближению возмущающего потенциала, который совпадает с формулой Стокса, влияют главным образом не на высоты квазигеоида, а на уклонения отвеса. Поэтому основное внимание должно быть уделено вычислениям уклонений отвеса.

Составляющие уклонений отвеса на физической поверхности Земли [4]

$$\xi=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dT}{\rho dB}-\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{dH}{\rho dB}\right), \tag{1}$$

$$\eta=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dT}{\rho\cos B dL}-\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{dH}{\rho\cos B dL}\right) \tag{2}$$

в плоскости меридиана и в плоскости первого вертикала определяются следующим образом. Величины $\frac{dT}{dB}$ и $\frac{dT}{dL}$ получают путем дифференцирования по геодезической широте B и долготе L возмущающего потенциала T, заданного на физической поверхности Земли, а $\frac{\partial T}{\partial \rho}$ находят из граничного условия

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}+\frac{2T}{\rho}=-\Delta g,$$

где Δg — измеренные аномалии силы тяжести. $\frac{dH}{\rho dB}$, $\frac{dH}{\rho\cos B dL}$ — наклоны физической поверхности Земли в исследуемой точке ($\rho=R+H$) в направлениях меридиана и первого вертикала, γ — значение нормальной силы тяжести в этой же точке.

Для получения указанных производных воспользуемся формулой, определяющей последовательные приближения возмущающего потенциала, полученной с помощью ряда Тейлора и параметра k Молоденского [3]. Она имеет вид:

$$T=T_0+T_1+T_2+\cdots, \tag{3}$$

где

$$T_0=\frac{R}{4\pi}\int \Delta g s(\psi)\, d\sigma, \tag{4}$$

$$T_1 = \frac{R}{4\pi}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right] s(\psi)\,d\sigma + \left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0 H, \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{R}{4\pi}\int\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 H + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 H^2\right] s(\psi)\,d\sigma + \left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_1 H - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2}\right)_0 H^2$$

и т. д.,

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int(\Delta g - \Delta g^{(0)})\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{2}{R}\Delta g, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 = \frac{1}{2\pi R}\int\left\{-\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0^{(0)} H_0\right]\right\}\frac{d\sigma}{r^3} - $$

$$- \frac{2}{R}\left[-\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right] + \left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 H,$$

$$\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int\left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0^{(0)}\right]\frac{d\sigma}{r^3} - \frac{3}{R}\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0$$

и т. д.,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0 = -\Delta g - \frac{2T_0}{R}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_1 = -\frac{2}{R}\left(T_1 - \frac{H}{R}T_0\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2}\right)_0 = -\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 + \frac{2}{R}\Delta g + \frac{6}{R^2}T_0$$

и т. д., $s(\psi)$ — функция Стокса, $d\sigma$ — элемент сферы единичного радиуса, $H=\rho-R$ — высоты рельефа Земли, $r=2\sin\frac{\psi}{2}$.

Величину $\frac{dT}{\rho dB}$, вычисленную с учетом первого приближения возмущающего потенциала $T=T_0+T_1$ (3—5), с требуемой точностью можно записать так:

$$\frac{dT}{RdB} = \frac{1}{4\pi}\int\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right]\frac{ds(\psi)}{dB}d\sigma + \left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0\frac{dH}{RdB} - \frac{Hd\Delta g}{RdB}.$$

Подставляя ее в (1), а аналогичное выражение, найденное для $\frac{dT}{\rho\cos BdL}$, в (2) и принимая во внимание, что в данном случае $\frac{\partial T}{\partial\rho} = \left(\frac{\partial T}{\partial\rho}\right)_0$, получаем формулы, определяющие уклонения отвеса в первом приближении

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right]\frac{ds(\psi)}{d\psi}\cos A d\sigma - \frac{H}{\gamma}\frac{d\Delta g}{RdB},$$

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 H\right]\frac{ds(\psi)}{d\psi}\sin A d\sigma - \frac{H}{\gamma}\frac{d\Delta g}{R\cos BdL}. \tag{7}$$

Здесь первые члены вычисляются по формулам Венинг-Мейнеса, причем в аномалии Δg вводится поправка за вертикальный градиент, найденный по формуле Нумерова (6). Градиенты $\frac{d\Delta g}{RdB}$ и $\frac{d\Delta g}{R\cos BdL}$, фигурирующие во вторых членах формул, можно определить по гравиметрической карте.

Так как все высоты H рельефа Земли могут быть уменьшены или увеличены на одинаковую величину [1—3], то для каждой исследуемой точки можно принять свою отсчетную сферу, проходящую через данную точку. В этом случае формулы (7) имеют вид:

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 + \xi_1 &= \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 (H - H_0)\right]\frac{ds(\psi)}{d\psi}\cos A d\sigma,\\ \eta = \eta_0 + \eta_1 &= \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left[\Delta g - \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 (H - H_0)\right]\frac{ds(\psi)}{d\psi}\sin A d\sigma.\end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая между собой правые части формул (7) и (8), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 \frac{ds(\psi)}{d\psi}\cos A d\sigma &= -\frac{d\Delta g}{RdB},\\ \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 \frac{ds(\psi)}{d\psi}\sin A d\sigma &= -\frac{d\Delta g}{R\cos BdL}.\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, величины $\dfrac{d\Delta g}{RdB}$ и $\dfrac{d\Delta g}{R\cos BdL}$, найденные по гравиметрической карте, должны быть равны вычисленным их значениям по формулам (9). Это позволяет контролировать надежность определений градиентов $\left(\dfrac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0$, выполненных по данной карте.

Обозначим искомые значения вторых интегральных членов в (7) буквами ξ' и η', вычисленные значения этих величин — через $\xi_в'$ и $\eta_в'$. Значения величин $\dfrac{d\Delta g}{RdB}$ и $\dfrac{d\Delta g}{R\cos BdL}$, найденные по карте, обозначим буквами M и N, а вычисленные их значения согласно (9) — через $M_в$ и $N_в$. Так как, строго говоря, $M_в \neq M$ и $N_в \neq N$, то в качестве искомых величин можно принять

$$\xi' = \xi_в'\frac{M}{M_в}, \quad \eta' = \eta_в'\frac{N}{N_в}.$$

Если поправки ξ_1 и η_1 к стоксову приближению ξ_0 и η_0 уклонений отвеса найдены согласно формулам (8), то в качестве искомых результатов принимаются $\xi_1\dfrac{M}{M_в}$ и $\eta_1\dfrac{N}{N_в}$.

Формулы (8) были предложены К. Арнольдом [7]. Они тождественны формулам (7) и, следовательно, первому приближению уклонений отвеса, найденному методом Молоденского [1, 2]. На тождественность этих формул указали также Л. П. Пеллинен [5] и Г. Мориц [8]. Однако, как легко убедиться, эти равенства не вытекают из формулы Арнольда для возмущающего потенциала [7]. Таким образом, мы имеем простой и в тоже время строгий вывод формул Арнольда (8). Этим же путем легко получить формулы, определяющие уклонения отвеса в точках физической поверхности Земли во втором и более высокого порядка приближениях. Если отсчетную сферу провести через исследуемую точку, то они примут вид

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma}\int\left\{\Delta g - \left[\left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Delta g}{\partial\rho}\right)_1 + \cdots\right](H - H_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\Delta g}{\partial\rho^2}\right)_0 + \cdots\right](H - H_0)^2 - \cdots\right\}\frac{ds(\psi)}{d\psi}\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix} d\sigma.$$

Рассмотренный метод вычисления уклонений отвеса является следствием определения возмущающего потенциала на физической поверхности Земли, основанного на использовании ряда Тейлора и малого параметра. В работах [1, 2, 5, 8] показана эквивалентность первых приближений формул Молоденского, Бровара и формул (3)—(5). Весьма важными представляются исследования Л. П. Пеллинена [6] и Г. Морица [9], в которых разными и оригинальными путями выполнено приведение вторых приближений Молоденского и Бровара для возмущающего потенциала к второму приближению формулы (3), имеющей вид ряда Тейлора.

Исследования В. Ф. Еремеева [4, 10] на моделях Земли показывают, что первое приближение формул Молоденского уже существенно улучшает искомые значения уклонений отвеса на физической поверхности Земли. Согласно результатам этих исследований уклонения отвеса в стоксовом приближении могут отличаться от точных их значений на несколько секунд. Основная часть поправки к стоксову приближению определяется первой поправкой Молоденского. Таким образом, для практики первостепенное значение имеют вычисления уклонений отвеса в первом приближении.

Рассмотрим некоторые стороны этих вычислений. Уклонения отвеса в первом приближении, так же как и в нулевом, могут быть найдены методом численного интегрирования по палеткам В. Ф. Еремеева. Для этого предварительно надо вычислить соответствующие поправки к измеренным аномалиям силы тяжести. Если воспользоваться формулами (7), эквивалентными формуле Молоденского для первого приближения уклонений отвеса [1, 2], то вместо поправок G_1 [4] вычислению подлежат поправки $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H$. Вертикальные градиенты $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0$ аномалий силы тяжести определяются формулой Нумерова (6). Следовательно, нахождение поправок $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H$ является более простым, чем вычисление поправок G_1, и может быть выполнено уже хорошо разработанным методом.

В практическом отношении формулы (7) представляются более универсальными, чем формулы Арнольда (8). Они совпадают с последними только тогда, когда отсчетная сфера проходит через исследуемую точку.

В отличие от поправок Арнольда $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 (H-H_0)$, большие значения поправок $\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 H$ могут быть уменьшены изменением всех высот H на некоторую постоянную величину. Вычисленные значения этих поправок без каких-либо изменений могут быть использованы при определении уклонений отвеса в любой точке земной поверхности. Здесь, как и в методе Молоденского, нет необходимости через каждую исследуемую точку проводить свою поверхность отсчета и вычислять каждый раз новые значения высот рельефа Земли и поправок, как это требуется в методе Арнольда.

В зависимости от сложности рельефа и гравитационного поля в районе вычислений можно ожидать, что при использовании формул, определяющих уклонения отвеса на физической поверхности Земли в первом приближении Молоденского, выявятся и их достоинства, и их недостатки. Поэтому только опыт применений разных методов в различных случаях позволит выбрать наиболее рациональный путь вычислений. Отсюда представляет интерес применение для моделей Земли разработанной в ЦНИИГАиК методики вычислений уклонений отвеса по формулам Венинг-Мейнеса с использованием гравиметрической карты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марыч М. И. Об определении отклонений отвеса на физической поверхности Земли. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 3. Изд-во Львовского ун-та, 1965.
2. Марыч М. И. Приведение формулы В. В. Бровара, определяющей фигуры Земли, к ряду Тейлора. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 6. Изд-во Львовского ун-та, 1967.
3. Марыч М. И. О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 10. Изд-во Львовского ун-та, 1969.
4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 131. М., Геодезиздат, 1960.
5. Пеллинен Л. П. О вычислении уклонений отвеса и высот квазигеоида в горах. — Тр. ЦНИИГАиК, вып. 176, М., «Недра», 1969.
6. Пеллинен Л. П. Согласование различных формул второго приближения для возмущающего потенциала и уклонений отвеса. — В сб.: Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 13. Изд-во Львовского ун-та, 1971.
7. Arnold K. The boundary-value problem of physical geodesy and its solution. Studia geophysica et geodaetica, 1965, 9, № 2.
8. Moritz H. Linieare Lösungen des Problems vom Molodenskij. «Österr. Z. Vermessungswesen», 1967, 55, Sonderh. 25.
9. Moritz H. A new series solution of Molodensky's problem. «Bulletin Géodésique», 1970, № 96.
10. Veremeev V. F. An investigation of some methods of calculating plumb-line deflections on an Earth model. Studia geophysica et geodaetica, 1970, 14, № 2.

Работа поступила в редколлегию 10 мая 1972 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и гравиметрии Львовского политехничского института.