

Я. М. КОСТЕЦКАЯ

# О ТОЧНОСТИ ДИРЕКЦИОННЫХ УГЛОВ В НЕСВОБОДНЫХ СПЛОШНЫХ СЕТЯХ ТРИЛАТЕРАЦИИ

Точность дирекционных углов в свободных трилатерационных построениях изучена хорошо [3—8]. Этому вопросу в несвободных построениях не уделено внимания, за исключением рядов из треугольников и геодезических четырехугольников [1—3]. Поэтому исследованы ошибки дирекционных углов в сетях трилатерации с исходными пунктами.

Рассмотрим сети трилатерации из трех, пяти и семи рядов равносторонних треугольников с четырьмя исходными пунктами, находящимися по углам сети, и двумя исходными дирекционными углами (рис. 1). Конфигурация сетей такова, что в каждом сдвоенном ряду треугольников имеем одинаковое число центральных систем, которое обозначим  $N$ . По формуле

$$m = \mu \sqrt{1/P} \quad (1)$$

определим средние квадратические ошибки дирекционных углов сетей трилатерации с  $N=5, 10, 15, 20$  и  $25$ . В (1)  $m$  — средняя квадратическая ошибка дирекционного угла;  $\mu$  — средняя квад-

ратическая ошибка измерения сторон сети;  $1/P$  — обратный вес Согласно алгоритму Гаусса

$$1/P = \mathbf{f}\mathbf{f}^T - \mathbf{f}\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{f}^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{f}$  — вектор коэффициентов весовой функции;  $\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов условных уравнений;  $\mathbf{B}$  — матрица коэффициентов нормальных уравнений. Поэтому для каждой исследуемой сети нужно установить все возникающие в ней условные уравнения и весовые функции оцениваемых элементов.

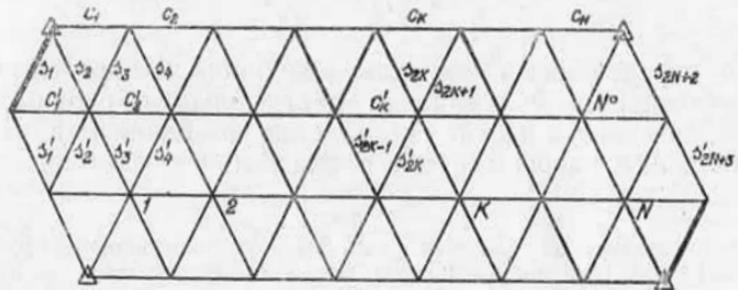


Рис. 1. Схема трехкратного ряда с обозначением сторон.

Весовые функции дирекционных углов составлены относительно исходного дирекционного угла стороны  $s_1$  по ходовым линиям, образованным из связующих сторон. Весовая функция после выражения поправок в углы через поправки в стороны дирекционного угла связующей стороны  $s_{2K}$  имеет вид

$$F_{\alpha(2K)} = \left[ 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c_i) - 2 \sum_{i=1}^k (c'_i) + (s_1) + (s_{2K}) \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a,$$

и стороны  $s_{2K-1}$

$$F_{\alpha(2K-1)} = \left[ 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c_i) - 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c'_i) + (s_1) - (s_{2K-1}) \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a,$$

где  $(c_i)$ ,  $(c'_i)$  и  $(s_i)$  — поправки в стороны  $c_i$ ,  $c'_i$  и  $s_i$  (см. рис. 1);  $a$  — длина сторон сети. Весовые функции промежуточных сторон  $c_K$  составлены по ходовой линии  $s_1 s_2 \dots s_{2K-1} c_K$ , а сторон  $c'_K$  — по ходовой линии  $s_1 s_2 \dots s_{2K-2} c'_K$ . Вид этих функций такой:

$$F_{\beta} = \left[ 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c_i) + (c_K) - 2 \sum_{i=1}^K (c'_i) + (s_1) + 2 (s_{2K}) - 2 (s_{2K+1}) \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a,$$

$$F_{\beta_1} = \left[ 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c_i) - 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c'_i) - (c'_K) + (s_1) - 2 (s_{2K-1}) + 2 (s_{2K}) \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a.$$

Весовые функции сторон  $s_{2K+1}$  составлены по ходовой линии  $s_1 s_1' s_2 \dots s_{2K+1}'$ , а сторон  $c_k - s_1 s_1' s_2 \dots s_{2K-1} c_k$ . Весовую функцию связующих сторон  $s_{2K+1}$  запишем

$$F_{\alpha 1(2K+1)} = \left[ -(s_1) + 2(s_2) + 2 \sum_{i=2}^K (c_i') - 2 \sum_{i=1}^K (c_i'') - \right. \\ \left. - 2(s_1') + 2(s_2') + (s_{2K+1}') \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a,$$

и промежуточных сторон  $C_k''$

$$F_{\beta 2} = \left[ -(s_1) + 2(s_2) + 2 \sum_{i=2}^K (c_i') - 2 \sum_{i=1}^{K-1} (c_i'') - (c_K'') - \right. \\ \left. - 2(s_1') + 2(s_2') - 2(s_{2K}') + (s_{2K+1}') \right] \rho / \sqrt{3} \cdot a.$$

Таким же образом составлены весовые функции дирекционных углов остальных сторон.

К матрице  $A$  присоединяем вектор  $f$  коэффициентов весовой функции и одновременно с определением элементов матрицы  $B$  находим  $r$  сумм  $\sum_{i=1}^n a_{ji} f_i$ . Здесь  $j=1, 2 \dots r$ , где  $r$  — число столбцов,

целое, а  $n$  — число строк в матрице  $A$ . Эти суммы вместе с квадратичным членом весовой функции образуют вектор из  $r+1$  элементов, который назовем вектором «нормальной» весовой функции. К матрице  $B$  присоединяем вектор «нормальной» весовой функции и в полученной матрице производим преобразования, связанные с исключением коррелят.

В исследуемых сетях возникает  $N(n-1)$  условных уравнений центральных систем ( $n$  — число рядов треугольников в сети). Кроме того, имеем шесть условий координат и одно условие дирекционных углов. К системе условных уравнений присоединим весовые функции связующих сторон  $(n+1)/2$  верхних рядов треугольников и промежуточных сторон, составляющих  $(n+1)/2$  верхних диагоналей. Весовые функции остальных сторон не составлялись, так как благодаря симметричности сети закономерности накопления ошибок верхней половины сети можно распространить и на ее нижнюю часть.

При определении элементов матрицы  $B$  и векторов «нормальных» функций были обнаружены закономерности их образования такого же типа, как показано в [5]. Поэтому составленная нами программа на ЭВМ ЕС-1022 состоит из двух частей. В первой части формируются элементы матрицы  $B$  и векторов «нормальных» весовых функций. Вторая часть программы реализует все дальнейшие вычисления по (2).

Как следует из [5] и [6], вектор коэффициентов весовой функции дирекционного угла имеет постоянный множитель  $\rho/a\sqrt{3}$ , где

$a$  — длина стороны сети. В составленной программе при формировании элементов вектора весовой функции не учитывался множитель  $\rho/a$ . В связи с этим из ЭВМ мы получали значения  $Q$ , которые задают зависимость геометрических связей, существующих между исходным и оцениваемыми дирекционными углами без учета длин сторон сети. Обратный вес дирекционного угла характеризует кроме качества геометрических связей также и раз-

Таблица 1  
Средние квадратические ошибки дирекционных углов  
(числитель) и значений  $Q$  (знаменатель) сторон  
трехкратного ряда с  $N=15$ ,  $\mu/a=1/200\ 000$  (...")

$k$	Промежуточные стороны		Связующие стороны	
	$c_k$	$c'_k$	$s_{2k}$	$s'_{2k-1}$
1	1,40/1,946	1,07/1,150	0,89/0,785	1,38/1,892
2	1,43/2,032	1,12/1,246	1,05/1,100	1,05/1,103
3	1,48/2,205	1,19/1,420	1,13/1,276	1,05/1,098
4	1,49/2,223	1,21/1,460	1,16/1,346	1,05/1,095
5	1,49/2,210	1,21/1,458	1,17/1,366	1,05/1,095
6	1,48/2,186	1,20/1,436	1,17/1,359	1,05/1,095
7	1,47/2,165	1,19/1,411	1,16/1,342	1,05/1,095
8	1,47/2,154	1,18/1,394	1,15/1,327	1,05/1,095
9	1,47/2,158	1,18/1,390	1,15/1,321	1,05/1,095
10	1,47/2,175	1,18/1,401	1,15/1,327	1,05/1,094
11	1,48/2,199	1,19/1,424	1,16/1,342	1,05/1,096
12	1,49/2,220	1,20/1,449	1,17/1,359	1,05/1,095
13	1,49/2,222	1,21/1,463	1,17/1,364	1,04/1,089
14	1,48/2,184	1,20/1,449	1,15/1,336	1,04/1,091
15	1,33/1,780	1,17/1,374	1,11/1,236	1,05/1,100
16		1,10/1,219	1,13/1,283	1,33/1,913

меры сети. Переход от  $Q$  к обратному весу производим по формуле

$$1/P = Q\rho^2/a^2. \quad (3)$$

Теперь формулу средней квадратической ошибки дирекционного угла можем записать так:

$$m = (\mu/a) \cdot \rho \sqrt{Q}. \quad (4)$$

Для обнаружения закономерностей накопления погрешностей дирекционных углов анализируем значения  $Q$ , характеризующие точность дирекционных углов трех-, пяти- и семикратных рядов с  $N=5, 10, 15, 20$  и  $25$ , а также вычисленные по (4) их средние квадратические ошибки. При вычислениях принято, что относительная ошибка измерения сторон  $1/200000$ , благодаря чему можно считать  $(\mu/a)\rho=1$ . Выявлены такие основные закономерности накопления погрешностей дирекционных углов в несвободных сессиях трилатерации.

1. Точность дирекционных углов всех сторон, находящихся в середине сети, практически одинакова. Различия в их средних квадратических ошибках не превышают 15%.

2. Точность дирекционных углов промежуточных сторон, расположенных на краю сети, на 35...40% ниже, чем сторон, находящихся в середине.

3. Увеличение числа  $N$  центральных систем в одном сдвоенном ряду сети очень мало действует на точность дирекционных углов. Так, увеличение  $N$  с 5 до 25 увеличивает ошибки дирекционных углов промежуточных сторон трехкратного ряда всего на

Таблица 2  
Средние квадратические ошибки дирекционных углов с  $\mu/a = 1/200\,000 (\dots")$

N	Промежуточные стороны				Связующие стороны					
	$c_s$	$c_5^I$	$c_5^{II}$	$c_5^{III}$	$s_{10}$	$s_{2N+2}$	$s_{2N+3}^I$	$s_{II}^{II}$	$s_{2N+3}^{II}$	$s_{2N+3}^{III}$
Трехкратный ряд										
5	1,2	1,0	—	—	1,1	1,1	1,4	—	—	—
10	1,4	1,1	—	—	1,1	1,1	1,4	—	—	—
15	1,5	1,2	—	—	1,2	1,1	1,4	—	—	—
20	1,5	1,3	—	—	1,2	1,1	1,4	—	—	—
25	1,6	1,3	—	—	1,2	1,1	1,4	—	—	—
Пятикратный ряд										
5	1,4	1,0	1,0	—	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	—
10	1,4	1,1	1,0	—	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	—
15	1,4	1,1	1,0	—	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	—
20	1,4	1,1	1,1	—	1,1	1,3	1,4	1,0	1,4	—
25	1,4	1,1	1,1	—	1,1	1,3	1,4	1,0	1,4	—
Семикратный ряд										
5	1,4	1,0	1,0	1,0	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	1,3
10	1,4	1,1	1,0	1,0	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	1,3
15	1,4	1,1	1,0	1,0	1,1	1,2	1,4	1,0	1,4	1,4
20	1,4	1,1	1,0	1,0	1,1	1,3	1,4	1,0	1,4	1,4
25	1,4	1,1	1,0	1,0	1,1	1,3	1,4	1,0	1,4	1,4

30%, а семикратного — на 10%. Действие  $N$  на точность дирекционных углов связующих сторон еще меньше.

4. Увеличение числа рядов сети, начиная с пяти, практически не влечет за собой изменения точности дирекционных углов.

Обнаруженные закономерности иллюстрируют табл. 1 и 2. В табл. 1 приведены средние квадратические ошибки и значения  $Q$  дирекционных углов промежуточных ( $c$  и  $c'$ ) и связующих ( $s$  и  $s'$ ) сторон трехкратного ряда с  $N=15$  (см. рис. 1), которые подтверждают две первые закономерности. Они также позволяют заметить менее существенные закономерности. Во-первых, то, что точность расположенных в середине сети промежуточных сторон на несколько процентов ниже, чем точность связующих. Во-вторых, точность дирекционных углов сторон любого ряда треугольников сети кроме крайних связующих можно характеризовать двугорбой кривой, максимумы которой располагаются на расстоя-

ниях  $1/4$ — $1/3$  длины ряда от края сети и затяжным минимумом между ними. Но при этом разность максимальной и минимальной ошибок составляет около  $1\dots 3\%$  с тенденцией уменьшения при увеличении числа рядов в сети.

В табл. 2 приведены средние квадратические ошибки нескольких промежуточных и связующих сторон, находящихся на одинаковых

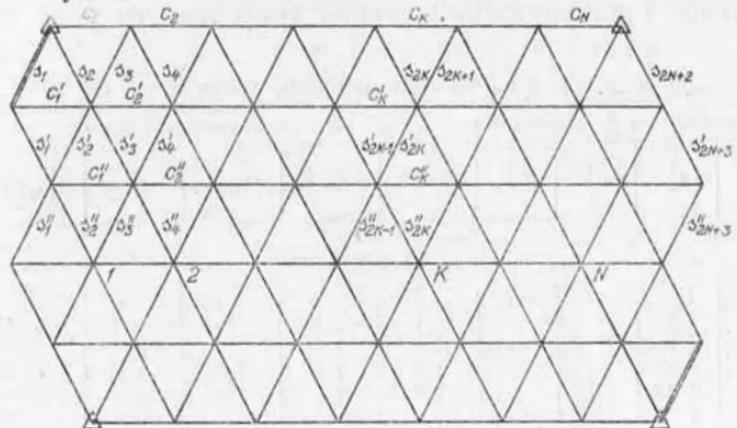


Рис. 2. Схема пятикратного ряда.

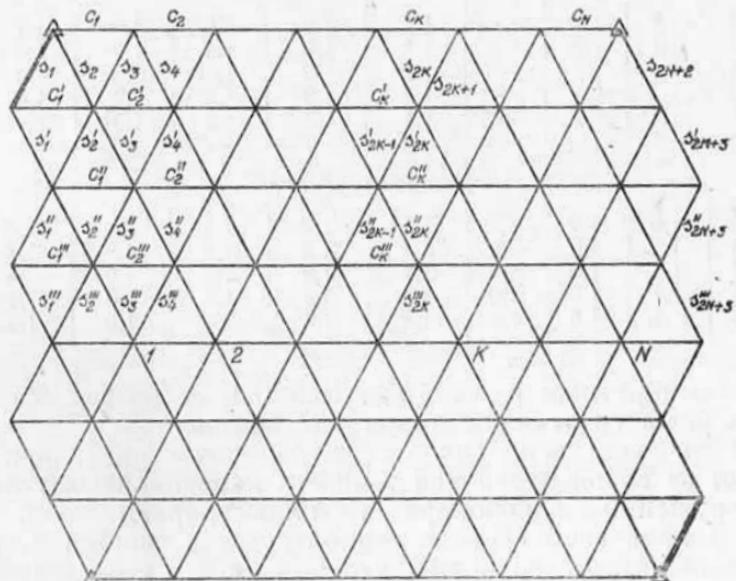


Рис. 3. Схема семикратного ряда.

ковом расстоянии от края сетей из трех, пяти и семи рядов (рис. 2 и 3) треугольников разного размера ( $N=5, 10, 15, 20$  и  $25$ ). Из табл. 2 видно, что только в трехкратном ряду заметно влияние размера сети на точность дирекционных углов. А переход от пяти до семи рядов практически не влияет на изменение точности дирекционных углов. Кроме этого из табл. 2 видно также, что точ-

ность связующих и промежуточных сторон, находящихся на краю сети ( $s_5$ ,  $s_{2N+2}$ ,  $s_{2'N+3}$ ,  $s_{2''N+3}$  и  $s_{2'''N+3}$ ) практически одинакова.

Предлагаем формулы для оценки точности дирекционных углов сторон, находящихся на краю сети,

$$m = \sqrt{2} \cdot \rho \mu/a = 1,4 \rho \mu/a \quad (5)$$

и для сторон, расположенных в ее середине,

$$m = 1,1 \rho \mu/a. \quad (6)$$

Сравнивая результаты, получаемые по (5) и (6), с данными табл. 2, видим, что погрешности формул для сетей из пяти и более рядов при  $N \geq 5$ , не превышают 10%.

По данным табл. 1 и 2 можно определить точность дирекционных углов аналогичных сетей, стороны которых измерены с любой относительной погрешностью. Для этого табличные значения ошибок нужно умножить на коэффициент  $\rho \mu/a$ .

**Список литературы:** 1. Аркашова У. П. Оценка точности рядов прямоугольников с измеренными сторонами и диагоналями. — Тр. Омск. с.-х. ин-та, 1970, № 2, с. 136—142. 2. Бронштейн Г. С., Сафонов А. С. Аппроксимация формул для оценки точности ряда трилатерации. — Геодезия и картография, 1974, № 1, с. 12—15. 3. Бронштейн С. Г. К вопросу об оценке точности ряда трилатерации. — Инженерно-строительные изыскания, 1974, вып. 1(34), с. 3—10. 4. Виленский В. А. О закономерностях накопления погрешностей в сплошных сетях трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 30, с. 41—48. 5. Заводовский А. В. Оценка точности линейных триангуляций. — Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. Геодезия, 1959, № 5, с. 3—33. 6. Костецкая Я. М. К вопросу оценки точности сплошных сетей трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1967, вып. 6, с. 25—41. 7. Костецкая Я. М. О точности дирекционных углов в сплошных сетях трилатерации. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 20, с. 45—50. 8. Кутузов И. А. Накопление погрешностей в рядах с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 2, с. 87—100. 9. Проровов К. Л. Точность элементов сети линейной триангуляции. — Тр. НИИГАиК, т. 11, 1958, с. 3—21.