

Г. А. МЕШЕРЯКОВ
О НОРМАЛЬНОЙ ЗЕМЛЕ *

При установлении в геодезии Нормальной Земли — (НЗ), понимаемой как уровенный эллипсоид вращения, исходят из следующих условий [15]:

- 1) центр принимаемого эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось, являющаяся осью вращения, — с осью вращения Земли;
- 2) угловые скорости ω вращения эллипсоида и реальной Земли должны быть одинаковыми;
- 3) массы НЗ и реальной Земли должны быть равны: $M_0 = fM$;
- 4) зональные гармонические коэффициенты ($J_2 = -C_{20}$) геоповерхности второй степени для НЗ и реальной Земли должны совпадать: $J_2^0 = J_2$;
- 5) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности НЗ должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести на геоиде: $U_0 = W_0$.

Практически, исходя из традиции и из представления потенциала притяжения рядом шаровых функций, в число постоянных, определяющих НЗ, вместо U_0 включают экваториальный радиус a , торидальный радиус НЗ должен быть подобран так, чтобы ее объем равнялся объему, охватываемому геоидом.

Таким образом, для описания НЗ и развиваемого ею нормального поля необходимо и достаточно [15] знать следующие постоянные: fM , J_2 , ω и a_e .

Учитывая важность НЗ, подчеркнем, что в широком смысле под этим термином понимается обобщенная модель Земли как планеты в целом, с одной стороны, отображающая ее основные свойства в осредненном виде, а с другой — наоборот просто представляющая ее для математического описания. Другими словами, НЗ должна содержать в себе главные сведения о механических характеристиках планеты при несложной и удобной для приложений математической аппроксимации последней.

НЗ при решении научных и практических задач выполняет двоякую роль: она применяется либо как правдоподобная модель Земли, с достаточной точностью — при решении ряда их — заменяющая реальную планету (в астрономии, геофизике, картографии, навигации, ...), либо там, где требуется более высокая точность — как очень хорошее ее первое приближение, ее главная часть, используемая затем как удобная система отсчета (в геодезии, гравиметрии, спутниковой геодезии, космической геодинاميке, ...).

Ввиду основополагающего значения НЗ для науки и техники с конца прошлого века твердо укоренилась исключительная научная традиция установления ее параметров как фундаментальных

* В основу статьи положены материалы доклада автора на пленарном заседании геодезической секции (25 октября 1984 г.) ХLI научно-технической конференции Львовского политехнического института.

постоянных астрономии и геодезии на крупнейших международных форумах — съездах Международного астрономического союза (МАС) и Генеральных ассамблеях Международного геодезического и геофизического союза (МГГС). Последние рекомендации современных значений фундаментальных постоянных опубликованы на XV Генеральной ассамблее МГГС — Москва, 1971 г. («Геодезическая референц-система 1967 г.» — GRS67) и на XVIII Генеральной ассамблее МГГС — Гамбург, 1983 г. («Геодезическая референцная система 1980 г.» — GRS 80). Периодический пересмотр числовых величин основных параметров НЗ и характеристик нормального гравитационного поля вызван совершенствованием и увеличением состава и видов наблюдений, по результатам которых они выводятся, постоянным повышением их точности и увеличивающейся необходимостью практики иметь такие значения этих параметров, которые адекватно обрабатываются действительностью. Последнее, естественно, вынуждает обращаться также к теории НЗ и к ее предельным [15, 13, 19—23, 1, 16], в которых, очевидно, должны быть отображены запросы не только геодезии, но и геофизики, ибо и в ней возникла теперь необходимость создания референцной плотностной модели планеты [8, 18], подлежащей не только быть согласованной с геодезической НЗ, но и составлять с ней взаимосвязанный комплекс — единую Нормальную Землю. И хотя такой вопрос ставился даже в международном масштабе [20], ответа на него до сих пор, кажется, нет. Ниже приводится конкретный путь его решения.

Анализируя перечисленные выше условия 1)–5), отмечаем, что среди них отсутствуют два важных условия, возведенные по традиции геодезистами в ранг постулатов. Действительно, условия 1)–5) накладываются не на НЗ, а на уровенный эллипсоид вращения, т. е. тем самым НЗ априори подменяется эллипсоидом, правда, в определенном смысле, наилучшим образом отвечающим Земле в глобальных масштабах. И если такая замена планеты — как физически понятного объекта природы математически простым образом (именно уровенным эллипсоидом, лишенным, однако, физической сущности) была, несмотря на ряд известных ее несовершенств, долгое время допустимой, то мириться с этим теперь (при современном уровне наших знаний о внешнем гравитационном поле Земли, характеризуемом наличием богатейшей информации о нем) уже нельзя.

Приведем подтверждающие примеры.

В настоящее время, когда точность линейных измерений и ускорения свободного падения достигает 10^{-9} и постоянно увеличивается, в физической геодезии возникла необходимость уменьшить возмущающий потенциал хотя бы на порядок. Это может быть выполнено только за счет более удачного выбора НЗ: предлагается, например, брать за НЗ геоид, описываемый одной из современных моделей гравитационного поля до восьмого порядка [1], или учитывать при формировании нормального поля четные зональные гармоники до восьмого, а затем и двадцатого порядков [22].

Далее. Используемые в настоящее время аномалии силы тяжести, вычисляемые относительно уровняного эллипсоида, не могут быть оптимально согласованы со строением земной коры; лучшее согласие для отдельных регионов дает попытка отнести аномалии не к эллипсоиду, а к основной части геоида, соответствующей его разложению до четвертого—шестого порядков [23].

Ограничившись только этими примерами, скажем: *основные требования*, предъявляемое к НЗ, должно заключаться в том, что ей должна быть придана такая форма и в нее должно быть вложено такое содержание, которые действительно определяли бы ее как Нормальную Землю в прямом смысле этого слова, т. е. такие форма и содержание, которые, с одной стороны, присущи планетам вообще и имеют определенный физический смысл, а с другой — соответствуют максимуму достоверных представлений о Земле, в совокупности выражающих — в рамках приближения, определяемого точностью результатов современных наблюдений — главную часть того, что составляет реальную планету.

Наконец, *следующие условия*, накладываемые на НЗ, должны касаться возможности ее поверхности быть определенной для основных физических характеристик планеты.

В порядке обсуждения затронутых вопросов вспомним сначала, что разумеется под термином *Земля* в интересующем нас аспекте, приведем основные факты проблемы, а затем выясним возможности решения ее с привлечением максимума накопившихся данных о гравитационном поле планеты.

Так как речь здесь идет не о физической поверхности Земли, являющейся предметом современной физической геодезии [14], а об ее обобщенной поверхности, то позволительно привести четкое определение последней по капитальной работе Н. И. Идельсона [4] и привести также основные представления о НЗ.

В классической теории фигур планет под термином *Земля* понимается неоднородная жидкая планета, вращающаяся вокруг оси наподобие твердого тела; такому вращению соответствует угловая скорость ω , одинаковая для всех ее частей; вращение предполагается медленным; квадрат угловой скорости ω^2 принимается за величину первого порядка малости; предполагается, что жидкая планета, вращаясь, находится в состоянии гидростатического равновесия, иными словами, что внутри планеты существует семейство поверхностей уровня таких, что во всех точках каждой такой поверхности будут иметь постоянное значение а) обобщенного потенциала силового поля, т. е. поля сил притяжения всей массы на данную точку, и центробежной силы, вызываемой вращением; б) плотность массы; в) гидростатическое давление. Предполагается, что плотность возрастает от поверхности к центру — это необходимо для устойчивого равновесия. Внешняя поверхность планеты должна, очевидно, также принадлежать семейству поверхностей уровня. Такую внешнюю поверхность вращающейся гидростатически равновесной планеты принято называть *сфероидом*.

При разложении потенциала притяжения сфероидов в ряд шаровых функций в последнем фигурируют только четные зональные гармоники с коэффициентами f_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots$).

Описанная концепция жидкой планеты принудит Клеро [7], выдвигавшему и исследовавшему ее в середине XVIII в., хотя впервые задано о форме жидкой однородной планеты была поставлена и частично изучена еще Ньютоном, априори считавшим форму такой планеты эллипсоидом вращения и подучившим частный случай необходимых условий ее равновесия. Клеро рассмотрел эти (и достаточные) условия равновесия в самом общем виде и вывел знаменитое интегродифференциальное уравнение, связывающее плотность и сжатия уровнейных поверхностей внутри планеты, и детально изучил — с удержанием в уравнениях последних малых первого порядка — решение проблемы: это так называемое приближение Клеро доставляет фундаментальное соотношение между параметрами гравитационного поля планеты и зависимость ускорения силы тяжести на ее поверхности от широты. В этом приближении и неоднородная жидкая планета имеет форму эллипсоида вращения; во всех последующих приближениях сфероид уже не совпадает с эллипсоидом.

Не останавливаясь на результатах последующих исследований проблемы Клеро—Далгаса—Ляпунова, связанных с именами многих знаменитых авторов, приведем лишь важные для нас факты, тем или иным образом связанные с ней:

жидкая однородная планета при выполнении условия $\omega^2 \leq 0,4516\omega_0^2$ имеет форму эллипсоида вращения (эллипсоида Маклорена):

для неоднородных жидких планет эллипсоидальные фигуры равновесия невозможны (Ами, Пуанкаре, Вольтерра);

аналитическое решение проблемы Клеро—Далгаса получено для сфероидов второго (сфероид Дарвина—де Ситтера) и третьего (Жарков, Трубицын) порядков;

численное решение проблемы Клеро—Далгаса—Ляпунова развито для сфероидов произвольных порядков (Жарков, Трубицын и их сотрудники). Исходной информацией при этом является или распределение плотности по одному из радиусов, или уравнение состояния вещества; это решение доставляет также параметры внешнего гравитационного поля гидростатически равновесной планеты;

гравитационное поле эллипсоида вращения определенных размеров, но неопределенной внутренней структуры, поверхность которого есть поверхность уровня потенциала силы тяжести, при заданных потенциале центробежной силы и общей массе эллипсоида определяется однозначно как вне эллипсоида, так и на его

* Под сфероидом часто понимают эллипсоид вращения с малым сжатием. Как будет видно из последующего, для наук о Земле такая трактовка слова *сфероид* непригодна, поэтому далее термин используется только в смысле теории фигур планет: *сфероид* — это краткое название поверхности гидростатически равновесной планеты.

** — гравитационная постоянная, δ_0 — плотность вещества планеты.

поверхности (Стокс, Пинетти, Самильяно); такой уровеньный эллипсоид применяются как НЗ;

при сохранении в разложении потенциала силы тяжести W только трех первых четных зональных гармоник соответственно с коэффициентами I_0, I_2, I_4 можно так изменить последний (взять $I_4 \neq I_4$), что потенциал U , содержащий I_0, I_2, I_4 , будет равен const на специально подобранном эллипсоиде вращения; это ком-промиссное предложение Гельмерта также используются при уста- новлении нормального эллипсоида;

как вытекает из следствия Римана к теореме Маклорена о при- тяжении софокусных эллипсоидов, внешний потенциал притяже- ния сфероида может быть заменен потенциалом так называемого фокального (крутового) диска, находящегося в экваториальной плоскости планеты, имеющего центр в центре ее масс и радиус $\sqrt{a^2 - b^2}$, где a и b — полуоси наименьшего по размерам эллипсон- да вращения, концентрического со сфероидом и объемлющего по- следний; плотность диска однозначно восстанавливается по из- вестному внешнему потенциалу сфероида.

Учитывая сказанное выше, приходим к выводу, что в ответ на основное требование, накладываемое теперь на НЗ, за последнюю целесообразно принимать не уровеньный эллипсоид вращения, а сфероид (Сфероидальная Нормальная Земля — СНЗ) как некую идеализированную поверхность планеты; она имеет вполне опре- деленный физический смысл (идеальная гидростатически равно- весная Земля), является уровнемной поверхностью и, наконец, наи- более полно аппроксимирует (по сравнению со всякими иными замкнутыми поверхностями, в том числе, и эллипсоидами) реаль- ную поверхность планеты, так как представляет ее главной частью.

Возвращаясь к сформулированным в начале статьи условиям 1) — 5), скажем, что теперь надо, во-первых, заменить в них слова *уровневый эллипсоид вращения* словом *сфероид*; во-вторых, ус- ловие 4) заменить более сильным: «четные зональные коэффи- циенты потенциала НЗ и реальной Земли до некоторого эмпири- чески устанавливаемого порядка N должны совпадать: $I_0^R = I_0^Z, (k=1, 2, \dots, N/2)$; и, в-третьих, условие 5) формулировать так: «нормальный потенциал U_0 силы тяжести на поверхности НЗ дол- жен быть равен реальному потенциалу силы тяжести на геоиде: $U_0 = W_0$, чем и определяется экваториальный радиус сфероида $a_{сф}$; либо, не апеллируя к W_0 и не добиваясь равенства $U_0 = W_0$, уста- навливая $a_{сф}$ (как масштаб построения НЗ) на основании каких- либо независимых обоснованных соотношений, например задавать его с учетом данных спутниковой альтиметрии».

Итак, СНЗ порядка N определяется заданием
 — угловой скорости ω вращения Земли;
 — набора *размерных четных зональных* I_{2k} стоксовых постоя- нных планеты, начиная с $I_0 = fM$, до порядка N включительно;
 — значения либо нормального потенциала силы тяжести на поверхности сфероида $U_0 = W_0$, либо его экваториального радиуса $a_{сф}$.

Последнее есть следствие очевидного соотношения между ос- новными параметрами СНЗ:

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{сф}^2}{2} = \frac{fM}{a_{сф}} + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{a_{сф}^{2k+1}} \cdot I_{2k}$$

которое в случае использования *безразмерных* зональных гармо- ник $I_{2k} = \frac{1}{fMR^{2k}} I_{2k}$, где обычно $R = a_0$, имеет вид

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{сф}^2}{2} = \frac{fM}{a_{сф}} \left[1 + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{R}{a_{сф}} \right)^{2k} \right] \cdot J_{2k}$$

Преимущества СНЗ перед НЗ в виде уровеньного эллипсоида были уже очерчены, большая часть их описывалась ранее рядом авторов, а А. А. Изотовым [5] еще в 1950 г. была предложена общая методика вывода земного сфероида. Однако до сих пор ис- пользуется уровеньный эллипсоид. Это понятие: последний доста- вляет «неплохое» приближение геоида, удобен для математической обработки геодезических построений на больших площадях, и за- счет этого он долгое время удовлетворял запросам геодезии, смеж- ных наук и практики. Но сейчас отмеченные выше объективные причины вызывают необходимость пересмотра вопроса о НЗ, в связи с чем приходится рассматривать более близкое приближе- ние к геоиду и, в первую очередь, СНЗ.

Конечно, принятие СНЗ вместо уровеньного нормального эл- липсоида повлечет за собой коренной пересмотр многих привыч- ных понятий и построений. Даже само задание сфероида нетра- диционно: оно осуществляется таблицей значений его радиуса-век- тора или аппроксимирующим многочленом по четным полиномам Лежандра (аргумент в них — синус геоцентрической широты). Но так как сфероид — поверхность вращения, то вычислительные формулы для него несложны, для него имеет место теорема Кле- ро о геодезических линиях; главное, внутренняя геометрия сферо- ида — это действительно сферодическая геодезия, а не эллипси- дическая, как было до сих пор. Заметим, кстати, что решение главных геодезических задач на сфероиде Клеро [17] не более трудоемко, чем на эллипсоиде вращения.

Для физической геодезии сфероид как уровеньная поверхность особенно удобен, он позволяет уменьшить возмущающий потен- циал, а значит, и более точно решать проблему Молоденского в линейной постановке.

Значение СНЗ для геофизики очевидно: аномалии силы тяже- сти на земной поверхности и вне ее и аномалии плотности земных недр («плотностные неоднородности») приобретут ясный физи- ческий смысл, если, конечно, СНЗ будет — на основании имею- щейся сейсмологической и другой информации — надеждена соот- ветствующей внутренней структурой, т. е. если будет создана также референциальная плотностная модель планеты.

