

## О НОРМАЛЬНОЙ ЗЕМЛЕ \*

При установлении в геодезии Нормальной Земли — (НЗ), принимаемой как уравненный эллипсоид вращения, исходят из следующих условий [15]:

1) центр принимаемого эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось, являющаяся осью вращения, с осью вращения Земли;

2) угловые скорости  $\omega$  вращения эллипса и реальной Земли должны быть одинаковыми;

3) массы НЗ и реальной Земли должны быть равны:  $fM_0 = fM$ ;

4) зональные гармонические коэффициенты ( $I_n = -C_{n0}$ ) геопотенциала второй степени для НЗ и реальной Земли должны совпадать:  $I_2^0 = I_2^R$ ;

5) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности НЗ должен быть равен реальному потенциальному силы тяжести на геополе:  $U_0 = W_0$ .

Практически, исходя из традиции и из представления потенциала приложения рядом шаровых функций, в число постоянных, определяющих НЗ, вместо  $U_0$  включают экваториальный радиус  $a$ , эллипса, за счет чего условие 5) заменяют условием 5'): экваториальный радиус НЗ должен быть подобран так, чтобы ее объем равнялся объему, охватываемому геоидом.

Таким образом, для описания НЗ и развивающегося ею нормального поля необходимо и достаточно [15] знать следующие постоянные:  $fM$ ,  $I_2^0$  и  $a_0$ .

Учитывая важность НЗ, подчеркнем, что в широком смысле под этим термином понимается обобщенная модель Земли как планеты в целом, с одной стороны, отображающая ее основные свойства в осредненном виде, а с другой — наиболее просто представляющая ее для математического описания. Другими словами, НЗ должна содержать в себе главнейшие сведения о механических качествах планеты при несложной и удобной для приложений математической аппроксимации последней.

НЗ при решении научных и практических задач выполняет двоякую роль: она применяется либо как правдоподобная модель Земли, с достаточной точностью — при решении ряда их — заменяющая реальную планету (в астрономии, геофизике, картографии, навигации, ...), либо там, где требуется более высокая точность — пользующаяся ее первое приближение, ее главная часть, ис- метрии, спутниковой геодезии, космической геодинамике, ...).

Ввиду основополагающего значения НЗ для науки и техники с конца прошлого века твердо укоренилась исключиительная науч-

\* В основу статьи положены материалы доклада автора на пленарном заседании геодезической секции (25 октября 1984 г.) ХЛI научно-технической конференции Львовского политехнического института.

постоянных астрономии и геодезии на крупнейших международных форумах — съездах Международного астрономического союза (МАС) и Генеральных ассамблей Международного геодезического и геофизического союза (МГГС). Последние рекомендованы современных значений фундаментальных постоянных обсуждались на XV Генеральной ассамблее МГГС — Москва, 1971 г. («Геодезическая референция-система 1967 г.» — GRS67) и на XVIII Генеральной ассамблее МГГС — Гамбург, 1983 г. («Геодезическая референция система 1980 г.» — GRS 80). Периодический пересмотр числовых величин основных параметров НЗ и характеристика нормального гравитационного поля вызвал совершенствование и увеличением состава и видов наблюдений, по результатам которых они выводятся, постоянно повышением их точности и увеличивающейся необходимостью практики иметь такие значения этих параметров, которые адекватно отображали бы действительность. Последнее, естественно, вынуждает обращаться также к теории НЗ и к ее предположкам [15, 13, 19—23, 1, 16], в которых, очевидно, должны быть отображены запросы не только геодезии, но и геофизики, ибо и в ней возникала теперь необходимость создания референциальной плотностной модели планеты [8, 18], существующей не только быть согласованной с геодезической НЗ, но и составлять с ней взаимосвязанный комплекс — единую Нормальную Землю. И хотя такой вопрос ставился даже в международном масштабе [20], ответа на него до сих пор, кажется, нет. Ниже приводится конкретный путь его решения.

Анализируя переписанные выше условия 1)—5), отмечаем, что среди них отсутствуют два важных условия, возведенные по традиции геодезистами в ранг постулатов. Действительно, условия 1)—5) накладываются не на НЗ, а на уравненный эллипсоид вращения, т. е. тем самым НЗ априорно поддается эллипсоидом, Земле в глобальных масштабах. И если такая замена планеты — как физически понятного объекта природы математически пристыкована (именно уравненным эллипсоидом, лишенным, однако, физической сущности) была, несмотря на ряд известных ее несовершенств, долгое время допустимой, то мириться с этим теперь (при современном уровне наших знаний о внешнем гравитационном поле Земли, характеризуемом наличием богатейшей информации о нем) уже нельзя.

Приведем подтверждающие примеры.

В настоящее время, когда точность линейных измерений и усиление свободного падения достигает  $10^{-9}$  и постоянно увеличивается, в физической геодезии необходимость уменьшить возмущающий потенциал хотя бы на порядок. Это может быть выполнено только за счет более удачного выбора НЗ: предлагаются, например, брать за НЗ геоид, описываемый одной из современных моделей гравитационного поля до восьмого порядка [1], или учитывать при формировании нормального поля четные зональные гармоники до восьмого, а затем и двадцатого порядков [22].

Далее. Используемые в настоящее время аномалии силы тяжести, вычисляемые относительно уровня эллипсоида, не могут быть оптимально согласованы со строением земной коры; лучшее согласие для отдельных регионов дает попытка относить аномалии не к эллипсоиду, а к основной части геода, соответствующей его разложению до четвертого—шестого порядков [23].

Ограничившись только этими примерами, скажем: *основное требование*, предъявляемое к НЗ, должно заключаться в том, что ей должна быть придана такая форма и в ее должно быть вложено такое содержание, которые действительно определяли бы ее как Нормальную Землю в прямом смысле этого слова, т. е. такие формы и содержание, которые, с одной стороны, присущи планетам вообще и имеют определенный физический смысл, а с другой — соответствуют максимуму достоверных представлений о Земле, в совокупности выражавших — в рамках приближения, определяемого точностью результатов современных наблюдений — главную часть того, что составляет реальную планету.

Наконец, *следующее условие*, накладываемое на НЗ, должно касаться возможности ее поверхности быть уровенной для основных физических характеристик планеты.

В порядке обсуждения затронутых вопросов вспомним сначала, что разумеется под термином *Земля* в интересующем нас аспекте, приведем основные факты проблемы, а затем выясним возможность решения ее с привлечением максимума накопившихся данных о гравитационном поле планеты.

Так как речь здесь идет не о физической поверхности Земли, являющейся предметом современной физической геодезии [14], а об ее обобщенной поверхности, то позволительно привести четкое определение последней по капитальной работе Н. И. Идельсона [4] и привести также основные представления о НЗ.

В классической теории фигур планет под термином *Земля* понимается неоднородная жидккая планета, вращающаяся вокруг оси наподобие твердого тела; такому вращению соответствует угловая скорость  $\omega$ , одинаковая для всех ее частей; вращение предполагается медленным; квадрат угловой скорости  $\omega^2$  принимается за величину первого порядка малости; предполагается, что жидккая планета, вращаясь, находится в состоянии гидростатического равновесия, иными словами, что внутри планеты существует семейство поверхностей уровня таких, что во всех точках каждой такой поверхности будут иметь постоянное значение а) общего потенциала силового поля, т. е. поля сил притяжения всей массы на данную точку, и б) центробежной силы, вызываемой вращением; б) плотность массы; в) гидростатическое давление. Предполагается, что плотность возрастает от поверхности к центру — это необходимо для устойчивого равновесия. Внешняя поверхность планеты должна, очевидно, также принадлежать семейству поверхностей уровня. Такую внешнюю поверхность вращающейся гидростатически равновесной планеты принято называть *сфероидом*.

дом\*. При разложении потенциала притяжения сфероида в ряд шаровых функций в последнем фигурируют только четные зональные гармоники с коэффициентами  $I_{2k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Описанная концепция жидкой планеты принадлежит Клеро [7], выдвинувшему и исследовавшему ее в середине XVIII в., хотя первая задача о форме жидкой однородной планеты была поставлена и частично изучена еще Ньютоном, априорно посчитавшим форму такой планеты эллипсоидом вращения и получившим частный случай необходимых условий ее равновесия. Клеро рассмотрел эти (и достаточные) условия равновесия в самом общем виде и вывел знаменитое интеграллическое уравнение, связывающее плотность и сжатия уровненных поверхностей внутри планеты, и детально изучил — с удержанием в уравнениях последних малых первого порядка — решение проблемы: это так называемое приближение Клеро доставляет фундаментальное сопоставление между параметрами гравитационного поля планеты и зависимость ускорения силы тяжести на ее поверхности от широты. В этом приближении и неоднородная жидкая планета имеет форму эллипса вращения; во всех последующих приближениях сфероид уже не совпадает с эллипсоидом.

Не останавливаясь на результатах последующих исследований проблемы Клеро—Лапласа—Ляпунова, связанных с именами многих знаменитых авторов, приведем лишь важные для нас факты, тем или иным образом связанные с ней: жидкая однородная планета при выполнении условия  $\frac{b}{a} \leq 0,45\delta_0^{**}$  имеет форму эллипса вращения (эллипса Маклорена);

для неоднородных жидких планет эллипсоидальные фигуры равновесия невозможны (Ами, Пуанкаре, Вольтерра); аналитическое решение проблемы Клеро—Лапласа получено для сфероидов второго (сфероид Дарвина—де Ситтера) и третьего (Жарков, Трубицын) порядков; численное решение проблемы Клеро—Лапласа—Ляпунова разработано для сфероидов произвольных порядков (Жарков, Трубицын и их сотрудники). Исходной информацией при этом является или распределение плотности по одному из радиусов, или уравнение состояния вещества; это решение доставляет также параметры внешнего гравитационного поля гидростатически равновесной планеты;

гравитационное поле эллипса вращения определенных размеров, но неопределенной внутренней структуры, поверхность которого есть поверхность уровня потенциала силы тяжести, при заданных потенциале центробежной силы и общей массе эллипса определяется однозначно как вне эллипса, так и на его

\* Под сфероидом часто понимают эллипс вращения с малым сжатием. Как будет видно из последующего, для наук о Земле такая трактовка слова *сфероид* непримлема, поэтому далее термин используется только в смысле термины фигуры планет: *сфероид* — это краткое название поверхности гидростатически равновесной планеты.

поверхности (Стокс, Пицетти, Самильяно); такой уровненный эллипсоид применяют как НЭ; при сохранении в разложении потенциала силы тяжести  $W$  только трех первых четных зональных гармоник соответственно с коэффициентами  $I_0, I_2, I_4$  можно так видоизменить последний (взять  $\tilde{I}_4 \neq I_4$ ), что потенциал  $U$ , содержащий  $I_0, I_2, \tilde{I}_4$ , будет равен const на специально подобранном эллипсоиде вращения; это комбинационное предложение Гельмерта также используют при установлении нормального эллипсоида;

Как вытекает из следствия Римана к теореме Маклорена о притяжении софокусных эллипсоидов, внешний потенциал притяжения сфероида может быть заменен потенциалом так называемого фокального (кругового) диска, находящегося в экваториальной плоскости планеты, имеющего центр в центре ее масс и радиус  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ , где  $a$  и  $b$  — полуоси наименьшего по размерам эллипсоида вращения, концентрического со сфероидом и объемлющего последний; плотность диска однозначно восстанавливается по известному внешнему потенциальному сфероида.

Учитывая сказанное выше, приходим к выводу, что в ответ на основное требование, накладываемое теперь на НЭ, за последнюю целесообразно принимать не уравненный эллипсоид вращения, а сфероид (*Сфероидальная Нормальная Земля — СНЭ*) как некую идеализированную поверхность планеты: она имеет вполне определенный физический смысл (идеальная гидростатически равновесная Земля), является уравненной поверхностью и, наконец, наиболее полно аппроксимирует (по сравнению со всякими иными замкнутыми поверхностями, в том числе, и эллипсоидами) реальную поверхность планеты, так как представляет ее главную часть. Возвращаясь к сформулированным в начале статьи условиям 1)—5), скажем, что теперь надо, во-первых, заменить в них слова *уровненный эллипсоид вращения* словом *сфероид*; во-вторых, условия 4) заменить более сильным: «четные зональные коэффициенты потенциала НЭ и реальной Земли до некоторого эмпирически установленного порядка  $N$  должны совпадать:  $I_{0k} = I_{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots, N/2$ )»; и, в-третьих, условие 5) формулировать так: «нормальный потенциал  $U_0$  силы тяжести на поверхности НЭ должен быть равен реальному потенциальному силы тяжести на геоиде:  $U_0 = W_0$ , чем и определяется экваториальный радиус сфероида  $a_{\text{сф}}$ , либо, не аппелируя к  $W_0$  и не добиваясь равенства  $U_0 = W_0$ , устанавливать  $a_{\text{сф}}$  (как масштаб построения НЭ) на основании каких-либо независимых обоснованных соображений, например задавать его с учетом данных спутниковой альтиметрии».

Итак, СНЭ порядка  $N$  определяется заданием

- угловой скорости вращения Земли;
- набора *размерных четных* зональных  $I_{2k}$  стоксовых постоянных планеты, начиная с  $I_0 = fM$ , до порядка  $N$  включительно;
- значения либо нормального потенциала силы тяжести на поверхности сфероида  $U_0 = W_0$ , либо его экваториального радиуса  $a_{\text{сф}}$ .

Последнее есть следствие очевидного соотношения между основными параметрами СНЭ:

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{\text{сф}}^2}{2} = \frac{fM}{a_{\text{сф}}} + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{a_{\text{сф}}^{2k+1}} \cdot I_{2k},$$

которое в случае использования *безразмерных* зональных гармоник  $I_{2k} = \frac{1}{fMR^{2k}} I_{2k}$ , где обычно  $R = a_e$ , имеет вид

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{\text{сф}}^2}{2} = \frac{fM}{a_{\text{сф}}} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left( \frac{R}{a_{\text{сф}}} \right)^{2k} \cdot J_{2k} \right].$$

Преимущества СНЭ перед НЭ в виде уравненного эллипсоида были уже очерчены, большая часть их описывалась ранее рядом авторов, а А. А. Изотовым [5] еще в 1950 г. была предложена общая методика вывода земного сфероида. Однако до сих пор используется уравненный эллипсоид. Это понятно: последний доставляет «неплохое» приближение геоида, удобен для математической обработки геодезических построений на больших площадях, и за счет этого он долгое время удовлетворял запросам геодезии, смежных наук и практики. Но сейчас отмеченные выше объективные причины вызывают необходимость пересмотра вопроса о НЭ, в связи с чем приходится рассматривать более близкое приближение к геоиду и, в первую очередь, СНЭ.

Конечно, принятие СНЭ вместо уравненного нормального эллипса повлечет за собой коренной пересмотр многих привычных понятий и построений. Даже само задание сфероида нетрадиционно: оно осуществляется таблицей значений его радиусов-векторов или аппроксимирующим многочленом по четным полиномам Лежандра (аргумент в них — синус геоцентрической широты). Но так как сфероид — поверхность вращения, то вычислительные формулы для него несложны, для него имеет место теорема Клеро о геодезических линиях; главное, внутренняя геометрия сфероида — это действительно сфероидическая геодезия, а не эллипсодическая, как было до сих пор. Заметим, кстати, что решение главных геодезических задач на сфероиде Клеро [17] не более трудоемко, чем на эллипсоиде вращения.

Для физической геодезии сфероид как уравненная поверхность особенно удобен, он позволяет уменьшить возмущающий потенциал, а значит, и более точно решать проблему Молоденского в линейной постановке.

Значение СНЭ для геофизики очевидно: аномалии силы тяжести на земной поверхности и вне ее и аномалии плотности земных недр («плотностные неоднородности») приобретут ясный физический смысл, если, конечно, СНЭ будет — на основании имеющейся сейсмологической и другой информации — наделена соответствующей внутренней структурой, т. е. если будет создана также референциальная плотностная модель планеты.

Построение СНЭ практически выполняется довольно просто. Перечисленная ранее необходимая информация ( $a_e$ ,  $J_M$ ,  $\phi$  и набор стоксовых постоянных  $I_{2k}$  при  $k=1, 2, \dots, N/2$ ) позволяет воспользоваться формулами (27.8) и (31.7) из [3], где, правда, последнее приведено только для  $N=6$ , или применить методику [9, 10], для которой порядок  $N$  несуществен.

Возвращаясь к общему обсуждению НЭ, предложим еще один ее вариант, занимающий промежуточное положение между Сфериодальной Нормальной Землей и Нормальной Землей — универсальным эллипсоидом, причем последний также предусмотрен разываемыми здесь построениями. Суть этого промежуточного варианта в том, что вместо земного сфероида — СНЭ — может быть построен аппроксимирующий его (хотя бы по методу наименьших квадратов) эллипсоид вращения, конечно, с неопределенной внутренней структурой; припишем ему массу  $M$  и угловую скорость  $\omega$  реальной Земли и посчитаем, а это возможно, что он разбивается во внешнем пространстве такой же потенциал, как и СНЭ. Такой эллипсоид назовем Эллипсоидальной Нормальной Землей (ЭНЭ). Как показали предварительные расчеты\*, такой ЭНЭ значительно отличается по размерам и форме от того усовенного эллипса, о котором были отнесены использованные стоксовые постоянные Земли.

ЭНЭ — суть эллипсоид, но эллипсоид неуровненный, распределение потенциала  $U$  на его поверхности легко может быть вычислено, очень просто вычисляется и распределение силы тяжести на планете; потенциал ЭНЭ — это главная часть потенциала реальной жесткой сфероида. Заметим, что обе нормальные Земли (СНЭ и ЭНЭ) взаимосвязаны: они разывают одно и то же нормальное поле; пересчет производных потенциала  $U$  с одной поверхности на другую довольно прост; их потенциалы могут быть трактованы потенциалом одного и того же фокального диска.

Заметим, что обращение в теории НЭ к неуровненному эллипсоиду так же, как и к сфероиду, — не новость: но если сфероид ввел Клеро более двухсот лет назад, то использование неуровненного эллипса при определении поверхности Земли (ее формы и размеров) дано было впервые сравнительно недавно (1949 г.).

Итак, в предлагаемой трактовке НЭ нормальное гравитационное поле планеты интерпретируется полем ее фокального диска. Пониматься либо сфероид, либо его аппроксимация — неуровненный эллипсоид вращения. Заметим, что для сохранения в качестве НЭ классического уровня эллипса достаточно эллипсоиду, аппроксимирующему геоид, присвоить такое постоянное значение потенциала, которое равно среднему значению  $W$  на последнем.

Удобную основу для физической геодезии: при решении проблемы

определения поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля по Молодецкому [13, 14] должна использоваться СНЭ, а по Мигалю [11, 12] — ЭНЭ; при вычислениях обширных геодезических построений в сфероидической геодезии придется либо создавать последнюю на сфероиде, либо пользоваться обычным аппаратом эллипсоидической геодезии; при наполнении НЭ геофизическим содержанием (при разработке референтной плотностной модели) вполне приемлема ЭНЭ; для геофизической и геологической интерпретации аномальных сил тяжести оба рассмотренных варианта НЭ идентичны.

**Список литературы:**

- Грушинский Н. П., Сагитов М. У., Чан Ван Няк. Нормальный геоид. — Сообщения Гос. Астроном. ин-та им. П. К. Штернберга, 1978, № 202—203, с. 49—62.
- Ефимов А. Б., Трубицын В. П. Гравитационные изомалии и равновесная фигура Земли. — В кн.: Пр. I Орловской конференции. К., 1982, с. 7—11.
- Жарков В. Н., Трубицын Н. И. Фундаментальная модель постоянных полей. — М.: Наука, 1980. — 448 с.
- Идельсон Г. И. Фундаментальная модель постоянных астрономии и геодезии: Астроном. ежегодник на 1942 г. — М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1941, с. 409—476.
- Изотов А. А. Форма и размеры Земли по современным данным. — Тр. ЦНИИГАИК, 1950, вып. 73, с. 204.
- Карпелевичиев К. Н. Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли. — М.: Наука, 1982. — 92 с.
- Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — 358 с.
- Козленко В. Г. Построение плотностной модели Земли по гравиметрическим данным. — Геофиз. журн. АН УССР, 1979, т. 1, № 3, с. 3—21.
- Мецерев Г. А. Использование метода птераний при определении обобщенных фигур планет. — In: Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets: Monograph. Series of VUGTK. Prague, 1983, p. 142—151.
- Мешериков Г. А. О сфероиде Клеро, обобщающем поверхность Марса. — В кн.: Картиграфирование Луны и Марса. М., 1978, с. 28—34.
- Мигалю Н. К. Теория гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАИК, 1960, вып. 131, с. 251.
- Морти Г. Современная физическая геодезия. — М.: Недра, 1983. — 390 с.
- Пелчин Л. П. Высшая геодезия. — М.: Недра, 1978. — 263 с.
- Пелчин Л. П., Нейман Ю. М. Физическая геодезия. — Итоги науки и техники. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, т. 18, с. 131.
- Редченко М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего аэрофотосъемка, 1969, вып. 8, с. 65—72.
- Девонский А. М., Андерсон Д. Л. Предварительные геодезические задачи на сфероиде Клеро. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 8, с. 65—72.
- Девонский А. М., Андерсон Д. Л. Планетарный геодезический Эарт Модель. — Physics of Earth and Planetary Interior, v. 25, 1981, p. 297—356.
- Геодезическая специальность du Bulletin géodésique. — Bureau Central de l'AIG, 1970, p. 116; Moritz H. Geodetic Reference System 1980. — Bulletin Géodésique, 1980, v. 54, № 3, p. 395—405.
- Марусси А., Морти Р., Рапп Р., Витцен Р. О. Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium: interim report. — Physics of the Earth and Planetary Interiors, v. 9, 1974, p. 4—6.
- Морти Р. Mass Distribution for the Equipotential Ellipsoid. — Bollettino di Geofisica teorica ed applicata, 1968, № 37, p. 59—65.
- Рапп Р. A Fortran program for the computation of gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansions. OSU Gravity Report, 1982, N 334, p. 1—17.
- Takeuchi H., Yamashita K. What is a standard gravity? — J. Phys. Earth, 1973, v. 21, N 1, p. 19—26.

Статья поступила в редакцию 26.12.84