

О НОРМАЛЬНОЙ ЗЕМЛЕ *

При установлении в геодезии Нормальной Земли— (НЗ), понимаемой как уровенный эллипсоид вращения, исходят из следующих условий [15]:

1) центр принимаемого эллипсоида должен совпадать с центром масс Земли, а его главная ось, являющаяся осью вращения, — с осью вращения Земли;

2) угловые скорости ω вращения эллипсоида и реальной Земли должны быть одинаковыми;

3) массы НЗ и реальной Земли должны быть равны: $fM_0 = fM$;

4) зональные гармонические коэффициенты ($I_n = -C_{n0}$) геопотенциала второй степени для НЗ и реальной Земли должны совпадать: $I_2^0 = I_2$;

5) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности НЗ должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести на геоиде: $U_0 = W_0$.

Практически, исходя из традиции и из представления потенциала притяжения рядом шаровых функций, в число постоянных, определяющих НЗ, вместо U_0 включают экваториальный радиус a эллипсоида, за счет чего условие 5) заменяют условием 5'): экваториальный радиус НЗ должен быть подобран так, чтобы ее объем равнялся объему, охватываемому геоидом.

Таким образом, для описания НЗ и развиваемого ею нормального поля необходимо и достаточно [15] знать следующие постоянные: fM , I_2 , ω и a_e .

Учитывая важность НЗ, подчеркнем, что в широком смысле под этим термином понимается обобщенная модель Земли как планеты в целом, с одной стороны, отображающая ее основные свойства в осредненном виде, а с другой — наиболее просто представляющая ее для математического описания. Другими словами, НЗ должна содержать в себе главнейшие сведения о механических качествах планеты при несложной и удобной для приложений математической аппроксимации последней.

НЗ при решении научных и практических задач выполняет двоякую роль: она применяется либо как правдоподобная модель Земли, с достаточной точностью — при решении ряда их — заменяющая реальную планету (в астрономии, геофизике, картографии, навигации, ...), либо там, где требуется более высокая точность — как очень хорошее ее первое приближение, ее главная часть, используемая затем как удобная система отсчета (в геодезии, гравиметрии, спутниковой геодезии, космической геодинاميке, ...).

Ввиду основополагающего значения НЗ для науки и техники с конца прошлого века твердо укоренилась исключительная научная традиция установления ее параметров как фундаментальных

* В основу статьи положены материалы доклада автора на пленарном

постоянных астрономии и геодезии на крупнейших международных форумах — съездах Международного астрономического союза (МАС) и Генеральных ассамблеях Международного геодезического и геофизического союза (МГГС). Последние рекомендации современных значений фундаментальных постоянных обсуждались на XV Генеральной ассамблее МГГС — Москва, 1971 г. («Геодезическая референц-система 1967 г.» — GRS67) и на XVIII Генеральной ассамблее МГГС — Гамбург, 1983 г. («Геодезическая референц-система 1980 г.» — GRS 80). Периодический пересмотр числовых величин основных параметров $\mathbb{N}3$ и характеристик нормального гравитационного поля вызван совершенствованием и увеличением состава и видов наблюдений, по результатам которых они выводятся, постоянным повышением их точности и увеличивающейся необходимостью практики иметь такие значения этих параметров, которые адекватно отображали бы действительность. Последнее, естественно, вынуждает обращаться также к теории $\mathbb{N}3$ и к ее предпосылкам [15, 13, 19—23, 1, 16], в которых, очевидно, должны быть отображены запросы не только геодезии, но и геофизики, ибо и в ней возникла теперь необходимость создания референцной плотностной модели планеты [8, 18], долженствующей не только быть согласованной с геодезической $\mathbb{N}3$, но и составлять с ней взаимосвязанный комплекс — единую Нормальную Землю. И хотя такой вопрос ставился даже в международном масштабе [20], ответа на него до сих пор, кажется, нет. Ниже приводится конкретный путь его решения.

Анализируя перечисленные выше условия 1)–5), отмечаем, что среди них отсутствуют два важных условия, возведенные по традиции геодезистами в ранг постулатов. Действительно, условия 1)–5) накладываются не на $\mathbb{N}3$, а на уровенный эллипсоид вращения, т. е. тем самым $\mathbb{N}3$ априорно подменяется эллипсоидом, правда, в определенном смысле, наилучшим образом отвечающим Земле в глобальных масштабах. И если такая замена планеты — как физически понятного объекта природы математически простым образом (именно уровенным эллипсоидом, лишенным, однако, физической сущности) была, несмотря на ряд известных ее несовершенств, долгое время допустимой, то мириться с этим теперь (при современном уровне наших знаний о внешнем гравитационном поле Земли, характеризующем наличием богатейшей информации о нем) уже нельзя.

Приведем подтверждающие примеры.

В настоящее время, когда точность линейных измерений и ускорения свободного падения достигает 10^{-9} и постоянно увеличивается, в физической геодезии возникла необходимость уменьшить возмущающий потенциал хотя бы на порядок. Это может быть выполнено только за счет более удачного выбора $\mathbb{N}3$: предлагается, например, брать за $\mathbb{N}3$ геоид, описываемый одной из современных моделей гравитационного поля до восьмого порядка [1], или учитывать при формировании нормального поля четные зональные гармоники до восьмого, а затем и двадцатого порядков [22].

Далее. Используемые в настоящее время аномалии силы тяжести, вычисляемые относительно уровенного эллипсоида, не могут быть оптимально согласованы со строением земной коры; лучшее согласие для отдельных регионов даст попытка относить аномалии не к эллипсоиду, а к основной части геоида, соответствующей его разложению до четвертого—шестого порядков [23].

Ограничившись только этими примерами, скажем: *основное требование*, предъявляемое к НЗ, должно заключаться в том, что ей должна быть придана такая форма и в нее должно быть вложено такое содержание, которые действительно определяли бы ее как Нормальную Землю в прямом смысле этого слова, т. е. такие форма и содержание, которые, с одной стороны, присущи планетам вообще и имеют определенный физический смысл, а с другой — соответствуют максимуму достоверных представлений о Земле, в совокупности выражающих — в рамках приближения, определяемого точностью результатов современных наблюдений — главную часть того, что составляет реальную планету.

Наконец, *следующее условие*, накладываемое на НЗ, должно касаться возможности ее поверхности быть уровенной для основных физических характеристик планеты.

В порядке обсуждения затронутых вопросов вспомним сначала, что разумеется под термином *Земля* в интересующем нас аспекте, приведем основные факты проблемы, а затем выясним возможности решения ее с привлечением максимума накопившихся данных о гравитационном поле планеты.

Так как речь здесь идет не о физической поверхности Земли, являющейся предметом современной физической геодезии [14], а об ее обобщенной поверхности, то позволительно привести четкое определение последней по капитальной работе Н. И. Идельсона [4] и привести также основные представления о НЗ.

В классической теории фигур планет под термином *Земля* понимается неоднородная жидкая планета, вращающаяся вокруг оси наподобие твердого тела; такому вращению соответствует угловая скорость ω , одинаковая для всех ее частиц; вращение предполагается медленным; квадрат угловой скорости ω^2 принимается за величину первого порядка малости; предполагается, что жидкая планета, вращаясь, находится в состоянии гидростатического равновесия, иными словами, что внутри планеты существует семейство поверхностей уровня таких, что во всех точках каждой такой поверхности будут иметь постоянное значение а) общий потенциал силового поля, т. е. поля сил притяжения всей массы на данную точку, и центробежной силы, вызываемой вращением; б) плотность массы; в) гидростатическое давление. Предполагается, что плотность возрастает от поверхности к центру — это необходимо для устойчивого равновесия. Внешняя поверхность планеты должна, очевидно, также принадлежать семейству поверхностей уровня. Такую внешнюю поверхность вращающейся гидростатически равновесной планеты принято называть *сфероидом*.

дом *. При разложении потенциала притяжения сфероида в ряд шаровых функций в последнем фигурируют только четные зональные гармоники с коэффициентами I_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots$).

Описанная концепция жидкой планеты принадлежит Клеро [7], выдвинувшему и исследовавшему ее в середине XVIII в., хотя впервые задача о форме жидкой однородной планеты была поставлена и частично изучена еще Ньютоном, априорно посчитавшим форму такой планеты эллипсоидом вращения и получившим частный случай необходимых условий ее равновесия. Клеро рассмотрел эти (и достаточные) условия равновесия в самом общем виде и вывел знаменитое интегродифференциальное уравнение, связывающее плотность и сжатия уровней поверхностей внутри планеты, и детально изучил — с удержанием в уравнениях последних малых первого порядка — решение проблемы: это так называемое приближение Клеро доставляет фундаментальное соотношение между параметрами гравитационного поля планеты и зависимость ускорения силы тяжести на ее поверхности от широты. В этом приближении и неоднородная жидкая планета имеет форму эллипсоида вращения; во всех последующих приближениях сфероид уже не совпадает с эллипсоидом.

Не останавливаясь на результатах последующих исследований проблемы Клеро—Лапласа—Ляпунова, связанных с именами многих знаменитых авторов, приведем лишь важные для нас факты, тем или иным образом связанные с ней:

жидкая однородная планета при выполнении условия $\omega^2 \leq \leq 0,45f\delta_0$ ** имеет форму эллипсоида вращения (эллипсоида Маклорена);

для неоднородных жидких планет эллипсоидальные фигуры равновесия невозможны (Ами, Пуанкаре, Вольтерра);

аналитическое решение проблемы Клеро—Лапласа получено для сфероидов второго (сфероид Дарвина—де Ситтера) и третьего (Жарков, Трубицын) порядков;

численное решение проблемы Клеро—Лапласа—Ляпунова развито для сфероидов произвольных порядков (Жарков, Трубицын и их сотрудники). Исходной информацией при этом является или распределение плотности по одному из радиусов, или уравнение состояния вещества; это решение доставляет также параметры внешнего гравитационного поля гидростатически равновесной планеты;

гравитационное поле эллипсоида вращения определенных размеров, но неопределенной внутренней структуры, поверхность которого есть поверхность уровня потенциала силы тяжести, при заданных потенциале центробежной силы и общей массе эллипсоида определяется однозначно как вне эллипсоида, так и на его

* Под сфероидом часто понимают эллипсоид вращения с малым сжатием. Как будет видно из последующего, для наук о Земле такая трактовка слова *сфероид* неприемлема, поэтому далее термин используется только в смысле теории фигур планет: **сфероид** — это краткое название поверхности гидростатически равновесной планеты.

** f — гравитационная постоянная, δ_0 — плотность вещества планеты.

поверхности (Стокс, Пицетти, Самильяно); такой уровенный эллипсоид применяют как НЗ;

при сохранении в разложении потенциала силы тяжести W только трех первых четных зональных гармоник соответственно с коэффициентами I_0, I_2, I_4 можно так видоизменить последний (взять $I_4 \neq I_4$), что потенциал U , содержащий I_0, I_2, I_4 , будет равен const на специально подобранном эллипсоиде вращения; это компромиссное предложение Гельмерта также используют при установлении нормального эллипсоида;

как вытекает из следствия Римана к теореме Маклорена о притяжении софокусных эллипсоидов, внешний потенциал притяжения сфероида может быть заменен потенциалом так называемого фокального (кругового) диска, находящегося в экваториальной плоскости планеты, имеющего центр в центре ее масс и радиус $\sqrt{a^2 - b^2}$, где a и b — полуоси наименьшего по размерам эллипсоида вращения, концентрического со сфероидом и объемлющего последний; плотность диска однозначно восстанавливается по известному внешнему потенциалу сфероида.

Учитывая сказанное выше, приходим к выводу, что в ответ на основное требование, накладываемое теперь на НЗ, за последнюю целесообразно принимать не уровенный эллипсоид вращения, а сфероид (*Сфероидальная Нормальная Земля* — СНЗ) как некую идеализированную поверхность планеты: она имеет вполне определенный физический смысл (идеальная гидростатически равновесная Земля), является уровенной поверхностью и, наконец, наиболее полно аппроксимирует (по сравнению со всякими иными замкнутыми поверхностями, в том числе, и эллипсоидами) реальную поверхность планеты, так как представляет ее главную часть.

Возвращаясь к сформулированным в начале статьи условиям 1)–5), скажем, что теперь надо, во-первых, заменить в них слова *уровенный эллипсоид вращения* словом *сфероид*; во-вторых, условие 4) заменить более сильным: «четные зональные коэффициенты потенциала НЗ и реальной Земли до некоторого эмпирически устанавливаемого порядка N должны совпадать: $I_{2k}^0 = I_{2k}$ ($k=1, 2, \dots, N/2$)»; и, в-третьих, условие 5) формулировать так: «нормальный потенциал U_0 силы тяжести на поверхности НЗ должен быть равен реальному потенциалу силы тяжести на геоиде: $U_0 = W_0$, чем и определяется экваториальный радиус сфероида $a_{сф}$, либо, не апеллируя к W_0 и не добиваясь равенства $U_0 = W_0$, устанавливать $a_{сф}$ (как масштаб построения НЗ) на основании каких-либо независимых обоснованных соображений, например задавать его с учетом данных спутниковой альтиметрии».

Итак, СНЗ порядка N определяется заданием

— угловой скорости ω вращения Земли;

— набора *размерных четных* зональных I_{2k} стоксовых постоянных планеты, начиная с $I_0 = fM$, до порядка N включительно;

— значения либо нормального потенциала силы тяжести на поверхности сфероида $U_0 = W_0$, либо его экваториального радиуса $a_{сф}$.

Последнее есть следствие очевидного соотношения между основными параметрами СНЗ:

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{\text{сф}}^2}{2} = \frac{fM}{a_{\text{сф}}} + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{a_{\text{сф}}^{2k+1}} \cdot I_{2k},$$

которое в случае использования *безразмерных* зональных гармоник $I_{2k} = \frac{1}{fMR^{2k}} I_{2k}$, где обычно $R = a_e$, имеет вид

$$U_0 - \frac{\omega^2 a_{\text{сф}}^2}{2} = \frac{fM}{a_{\text{сф}}} \left[1 + \sum_{k=1}^{N/2} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{R}{a_{\text{сф}}} \right)^{2k} \cdot J_{2k} \right].$$

Преимущества СНЗ перед НЗ в виде уровенного эллипсоида были уже очерчены, большая часть их описывалась ранее рядом авторов, а А. А. Изотовым [5] еще в 1950 г. была предложена общая методика вывода земного сфероида. Однако до сих пор используется уровенный эллипсоид. Это понятно: последний доставляет «неплохое» приближение геоида, удобен для математической обработки геодезических построений на больших площадях, и за счет этого он долгое время удовлетворял запросам геодезии, смежных наук и практики. Но сейчас отмеченные выше объективные причины вызывают необходимость пересмотра вопроса о НЗ, в связи с чем приходится рассматривать более близкое приближение к геоиду и, в первую очередь, СНЗ.

Конечно, принятие СНЗ вместо уровенного нормального эллипсоида повлечет за собой коренной пересмотр многих привычных понятий и построений. Даже само задание сфероида нетрадиционно: оно осуществляется таблицей значений его радиуса-вектора или аппроксимирующим многочленом по четным полиномам Лежандра (аргумент в них — синус геоцентрической широты). Но так как сфероид — поверхность вращения, то вычислительные формулы для него несложны, для него имеет место теорема Клеро о геодезических линиях; главное, внутренняя геометрия сфероида — это действительно сфероидическая геодезия, а не эллипсоидическая, как было до сих пор. Заметим, кстати, что решение главных геодезических задач на сфероиде Клеро [17] не более трудоемко, чем на эллипсоиде вращения.

Для физической геодезии сфероид как уровенная поверхность особенно удобен, он позволит уменьшить возмущающий потенциал, а значит, и более точно решать проблему Молоденского в линейной постановке.

Значение СНЗ для геофизики очевидно: аномалии силы тяжести на земной поверхности и вне ее и аномалии плотности земных недр («плотностные неоднородности») приобретут ясный физический смысл, если, конечно, СНЗ будет — на основании имеющейся сейсмологической и другой информации — наделена соответствующей внутренней структурой, т. е. если будет создана также референсная плотностная модель планеты.

Построение СНЗ практически выполняется довольно просто. Перечисленная ранее необходимая информация (a_e, fM, ω и набор стоксовых постоянных I_{2k} при $k=1, 2, \dots, N/2$) позволяет воспользоваться формулами (27.8) и (31.7) из [3], где, правда, последние приведены только для $N=6$, или применить методику [9, 10], для которой порядок N несуществен.

Возвращаясь к общему обсуждению НЗ, предложим еще один ее вариант, занимающий промежуточное положение между Сфероидальной Нормальной Землей и Нормальной Землей — уровнем эллипсоидом, причем последний также предусмотрен развиваемыми здесь построениями. Суть этого промежуточного варианта в том, что вместо земного сфероид — СНЗ — может быть построен аппроксимирующий его (хотя бы по методу наименьших квадратов) эллипсоид вращения, конечно, с неопределенной внутренней структурой; припишем ему массу M и угловую скорость ω реальной Земли и посчитаем, а это возможно, что он развивает во внешнем пространстве такой же потенциал, как и СНЗ. Такой эллипсоид назовем *Эллипсоидальной Нормальной Землей* (ЭНЗ). Как показали предварительные расчеты*, такой ЭНЗ незначительно отличается по размерам и форме от того уровня эллипсоида, к которому были отнесены использованные стоксовы постоянные Земли.

ЭНЗ — суть эллипсоид, но эллипсоид неуровенный, распределение потенциала U на его поверхности легко может быть вычислено, очень просто вычисляется и распределение силы тяжести на нем; потенциал ЭНЗ — это главная часть потенциала реальной планеты. В физическом смысле ЭНЗ — это «обобщенный», сглаженный сфероид. Заметим, что обе нормальные Земли (СНЗ и ЭНЗ) взаимосвязаны: они развивают одно и то же нормальное поле; пересчет производных потенциала U с одной поверхности на другую довольно прост; их потенциалы могут быть трактованы потенциалом одного и того же фокального диска.

Заметим, что обращение в теории НЗ к неуровенному эллипсоиду так же, как и к сфероиду, — не новость: но если сфероид ввел Клеро более двухсот лет назад, то использование неуровенного эллипсоида при определении поверхности Земли (ее формы и размеров) дано было впервые сравнительно недавно (1949 г.) Н. К. Мигалем [11].

Итак, в предлагаемой трактовке НЗ нормальное гравитационное поле планеты интерпретируется полем ее фокального диска, а под ее поверхностью в зависимости от целей использования может пониматься либо сфероид, либо его аппроксимация — неуровенный эллипсоид вращения. Заметим, что для сохранения в качестве НЗ классического уровня эллипсоида достаточно эллипсоиду, аппроксимирующему геоид, приписать такое постоянное значение потенциала, которое равно среднему значению W на последнем.

Описанная здесь нетрадиционная концепция НЗ представляет удобную основу для физической геодезии: при решении проблемы

* Вычисления выполнены дипломником геодезического факультета ЛПИ Н. Ф. Агеевым.

определения поверхности Земли и ее внешнего гравитационного поля по Молоденскому [13, 14] должна использоваться СНЗ, а по Мигалю [11, 12] — ЭНЗ; при вычислениях обширных геодезических построений в сфероидической геодезии придется либо создавать последнюю на сфероиде, либо пользоваться обычным аппаратом эллипсоидической геодезии; при наполнении НЗ геофизическим содержанием (при разработке референсной плотностной модели) вполне приемлема ЭНЗ; для геофизической и геологической интерпретации аномалий силы тяжести оба рассмотренных варианта НЗ идентичны.

Список литературы: 1. *Грушинский Н. П., Сагитов М. У., Чан Ван Нян.* Нормальный геоид. — Сообщения Гос. Астроном. ин-та им. П. К. Штернберга, 1978, № 202—203, с. 49—62. 2. *Ефимов А. Б., Трубицын В. П.* Гравитационные аномалии и равновесная фигура Земли. — В кн.: Тр. I Орловской конференции. К., 1982, с. 7—11. 3. *Жарков В. Н., Трубицын В. П.* Физика планетных недр. — М.: Наука, 1980. — 448 с. 4. *Идельсон Н. И.* Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии: Астроном. ежегодник на 1942 г. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941, с. 409—476. 5. *Изотов А. А.* Форма и размеры Земли по современным данным. — Тр. ЦНИИГАиК, 1950, вып. 73, с. 204. 6. *Картвелишвили К. Н.* Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли. — М.: Наука, 1982. — 92 с. 7. *Клеро А.* Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. — М.: Изд-во АН СССР, 1947. — 358 с. 8. *Козленко В. Г., Старостенко В. И.* Построение плотностной модели Земли по гравиметрическим данным. — Геофиз. журн. АН УССР, 1979, т. 1, № 3, с. 3—21. 9. *Мещеряков Г. А.* Использование метода итераций при определении обобщенных фигур планет. — In.: Proc. Int. Symp. Figure of the Earth, the Moon and other Planets: Monograph. Series of VUGTK. Prague, 1983, p. 142—151. 10. *Мещеряков Г. А.* О сфероиде Клеро, обобщающем поверхность Марса. — В кн.: Картографирование Луны и Марса. М., 1978, с. 28—34. 11. *Мигаль Н. К.* Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. — Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. геодезическая, 1949, вып. 15, № 1, с. 66. 12. *Мигаль Н. К.* Лекции по теории фигуры Земли. — Львов: ЛПИ, 1969, ч. 2, с. 133. 13. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131, с. 251. 14. *Моритц Г.* Современная физическая геодезия. — М.: Недра, 1983. — 390 с. 15. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия. — М.: Недра, 1978. — 263 с. 16. *Пеллинен Л. П., Нейман Ю. М.* Физическая геодезия. — Итоги науки и техники. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, т. 18, с. 131. 17. *Русин М. И.* Решение геодезических задач на сфероиде Клеро. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 8, с. 65—72. 18. *Dzevonsky A. M., Anderson D. L.* Preliminary reference Earth Model. — Physics of Earth and Planetary Interior, v. 25, 1981, p. 297—356. 19. Geodetic Reference system 1967. — Publication speciale du Bulletin géodesique. — Bureau Central de l'AIG, 1970, p. 116.; *Moritz H.* Geodetic Reference System 1980. — Bulletin Geodetique, 1980, v. 54, № 3, p. 395—405. 20. *Marussi A., Moritz H., Rapp R. H., Vicente R. O.* Ellipsoidal density models and hydrostatic equilibrium: interim report. — Physics of the Earth and Planetary Interiors, v. 9, 1974, p. 4—6. 21. *Moritz H.* Mass Distribution for the Equipotential Ellipsoid. — Bolletino di Geofisica teorica ed applicata, 1968, № 37, p. 59—65. 22. *Rapp R. H.* A Fortran program for the computation of gravimetric quantities from high degree spherical harmonic expansions, OSU. — Report, 1982, N 334, p. 1—17. 23. *Takeuchi H., Yamashina K.* What is a standart gravity? — J. Phys. Earth, 1973, v. 21, N 1, p. 19—26.