$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} = \frac{a_4(1-2x)y + b_4(0{,}5-y) - \frac{1}{d}(H_{00}+H_{11}-H_{01}-H_{10})}{a_4 y^2 + a_2},$$

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \frac{a_4(1-2x)y + b_4(0{,}5-y) - \frac{1}{d}(H_{00}+H_{11}-H_{01}-H_{10})}{a_4 x^2 + (b_4 - a_4)x + b_3}, \qquad (19)$$

процесс последовательных приближений (18) сходится, если в выражениях (19) знаменатель по абсолютной величине больше числителя.

Определение средней отметки при планировочных работах. При планировке поверхности необходимо знать среднюю отметку для правильного выбора проектной плоскости (поверхности), а также для вычисления объемов земляных работ. Поскольку дифференциальная ЦМР лучше аппроксимирует естественную поверхность, чем билинейная, средние отметки ячеек сетки, полученные на ее основе, более репрезентативные. А это, в свою очередь, дает возможность повысить точность проектирования и существенно уточнить объемы земляных работ, что имеет большое практическое значение.

Среднюю отметку квадратной ячейки в принятой нами системе единиц можно получить из выражения

$$\bar{H} = \int_0^1 \int_0^1 H(x, y)\,dxdy. \qquad (20)$$

Подставив в (20) вместо $H(x, y)$ его значение из (9) и выполнив интегрирование, находим

$$\bar{H} = \frac{1}{4}(H_{00}+H_{01}+H_{10}+H_{11}) - \frac{d}{12}\left(a_2 + \frac{a_4}{3} + b_3 + \frac{b_4}{2}\right). \qquad (21)$$

Рассмотренные нами ЦМР и связанные с ней алгоритмы достаточно просты и могут быть реализованы на ЭВМ без каких-либо затруднений. Вместе с тем при минимальном объеме исходных данных она способна дать весьма ценную информацию о рельефе местности.

В заключение следует отметить, что данную модель помимо топографии можно также применять в геологии и геометрии недр для моделирования подошвы и кровли полезного ископаемого и подсчета его запасов.

1. *Бойко А. В.* Методы и средства автоматизации топографических съемок. — М.: Недра, 1980. — 222 с. 2. *Гармиз И. В.* Оценка точности определения высот точек по цифровой модели рельефа. — Л., 1972. — 18 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ. 3. *Девдариани А. С.* Математический анализ в геоморфологии. — М.: Недра, 1967. — 155 с. 4. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с. 5. *Дуда Р., Харт П.* Распознавание образцов и анализ сцен. — М.: Мир, 1976. — 511 с. 6. *Смирнов Н. В., Белугин Д. А.* Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. — М.: Недра, 1969. — 379 с. 7. *Соболевский П. К.* Современная горная геометрия. — Социалистическая реконструкция и наука, 1932, № 7, с. 42—78. 8. *Рудый Р. М.* Выделение структурных линий рельефа аналитическим методом. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 39, с. 135—140. 9. *Gazdzicki I.* Informatyka w geodezji i kartografii. — Warszawa: PPWK, 1975. — 300 s. 10. *Schut G. H.* Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models. — The Canadian Surveyor, v. 30, № 5, 1976, p. 389—412.

Статья поступила в редколлегию 16. 11. 84

УДК 528.14

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО, В. А. ЛУКАШЕНКО

ВЛИЯНИЕ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ НАБЛЮДЕНИЙ НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнивание геодезических сетей методом наименьших квадратов требует решения довольно обширных систем нормальных уравнений. На точность решения немаловажное влияние оказывают числа обусловлености систем, которые зависят не только от размеров и конфигурации сети, но и от точности выполненных измерений, а также от замены непосредственных результатов измерений их функциями, коррелированность которых не учитывается. В настоящей работе теоретически рассмотрим влияние указанных параметров на собственные значения и числа обусловленности матриц нормальных уравнений, возникающих при уравнивании геодезических сетей параметрическим и коррелатным способами.

Для облегчения математических выводов условимся в дальнейшем обозначать собственные значения квадратной матрицы A через $\lambda(A)$ и нумеровать их в порядке невозрастания. Приведем также ряд необходимых фактов, касающихся свойств собственных значений матриц.

Утверждение 1 [7, 8]. Если A и B — неотрицательно определенные матрицы порядка n, то для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняются неравенства

$$\lambda_n(B)\lambda_i(A) \leqslant \lambda_i(AB) \leqslant \lambda_i(A)\lambda_1(B),$$
$$\lambda_n(A)\lambda_i(B) \leqslant \lambda_i(AB) \leqslant \lambda_i(B)\lambda_1(A).$$

Утверждение 2 [6]. Ненулевые собственные значения матриц AB и BA совпадают.

Примем: Q — ковариационная матрица результатов непосредственных измерений или заменяющих их линейных функций; B — матрица коэффициентов системы условных уравнений; A — мат-

рица коэффициентов системы параметрических уравнений попра-
вок.

Коррелатный способ. Имеем матрицу коэффициентов B порядк[а] $r \times n$ системы условных уравнений и ковариационную неотрица[-]тельно определенную матрицу Q порядка n уравниваемых вели[-]чин ранга $\operatorname{rang} Q > \operatorname{rang} B = r$, где r — число условных уравнени[й]. Соответствующая нормальная матрица

$$N = BQB^T. \qquad (1)$$

Если уравниваемые величины считать независимыми и равно[-]точными, вместо (1) имеем матрицу

$$\bar{N} = BB^T. \qquad (2)$$

Применяя к матрицам (1) и (2) утверждение *2*, получаем не[-]нулевые собственные значения матриц:

$$\lambda_i(N) = \lambda_i(B^T BQ), \quad i = 1, 2, \cdots, r, \qquad (3)$$

$$\lambda_j(\bar{N}) = \lambda_j(B^T B), \quad j = 1, 2, \cdots, r. \qquad (4)$$

Применяя к матрицам $B^T B$ и Q утверждение *1* и учитывая ра[-]венства (3) и (4), имеем

$$\lambda_n(Q)\,\lambda_i(\bar{N}) \leqslant \lambda_i(N) \leqslant \lambda_i(\bar{N})\,\lambda_1(Q),$$
$$0 \leqslant \lambda_i(N) \leqslant \lambda_i(Q)\,\lambda_1(\bar{N}). \qquad (5)$$

Из неравенств (5) следует: если $\lambda_1(Q) \leqslant 1$, то $\lambda_i(N) \leqslant \lambda_i(\bar{N})$; если $\lambda_n(Q) \geqslant 1$, то $\lambda_i(N) \geqslant \lambda_i(\bar{N})$. В частном случае при Q-диаго[-]нальной подтверждается известный результат И. Тренкова [5]: возрастание весов измерений при коррелатном уравнивании при[-]водит к уменьшению собственных значений нормальной матрицы.

На основании (5) можно получить также оценку спектрального числа обусловленности

$$\frac{\lambda_n(Q)\,\lambda_1(\bar{N})}{\lambda_1(Q)\,\lambda_r(\bar{N})} \leqslant k(N) = \frac{\lambda_1(N)}{\lambda_r(N)} \leqslant \frac{\lambda_1(\bar{N})\,\lambda_1(Q)}{\lambda_r(\bar{N})\,\lambda_n(Q)}$$

или

$$k(\bar{N})/k(Q) \leqslant k(N) \leqslant k(\bar{N})\,k(Q). \qquad (6)$$

Если Q — диагональная матрица, то число обусловленност[и] $k(Q) = \max p_i / \min p_i$, где p_i — веса измерений, и тогда

$$\frac{\min p_i}{\max p_i} k(\bar{N}) \leqslant k(N) \leqslant k(\bar{N}) \frac{\max p_i}{\min p_i}, \qquad (7)$$

т. е. большое различие в весах измеренных величин может при[-]водить к существенному изменению обусловленности матрицы N.

Рассмотрим далее вопрос уравнивания триангуляции по углам при равноточно измеренных направлениях. При строгом уравни[-]вании углов матрица Q квазидиагональна с диагональными квад[-]ратными блоками

$$Q_i = U_i U_i^T$$

для каждого i-го пункта сети, на котором наблюдались направ[-]ления, поэтому $\lambda_j(Q)$ будут равны переупорядоченной в порядке невозрастания совокупности собственных значений блоков Q_i. Здесь U_i — матрица перехода от поправок направлений к по[-]правкам уравниваемых углов.

В зависимости от того, какие углы включаются в уравнивание, получим различные нормальные матрицы N_k, $\bar{N}_k$ и подматрицы U_{ik}, Q_{ik}, где индекс k означает тип уравниваемых углов.

Пусть уравниваются углы между произвольно выбранным на[-]чальным и последующими направлениями ($k=1$). Тогда можно написать

$$U_{i1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{i1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

причем подматрицы Q_{i1} имеют порядок $(n_i-1) \times (n_i-1)$, где n_i — число измеренных на пункте i направлений. Для нахождения собственных значений $\lambda(Q_{i1})$ заметим, что ненулевые собственные значения матриц $U_{i1} U_{i1}^T$ и

$$U_{i1}^T U_{i1} = \begin{vmatrix} n_i - 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

совпадают, $\operatorname{rang}(U_{i1}^T U_{i1}) = \operatorname{rang} Q_{i1} = n_i - 1$, $\lambda_{n_i}(U_{i1}^T U_{i1}) = 0$, след $\operatorname{Sp} Q_{i1} = \operatorname{Sp}(U_{i1}^T U_{i1}) = 2(n_i - 1)$.

Вычеркивая из матрицы (9) первые столбец и строку и приме[-]няя к полученной единичной матрице и матрице (9) теорему раз[-]деления Штурма [1], находим

$$\lambda_1(Q_{i1}) = n_i; \ \lambda_j(Q_{i1}) = 1, \quad j = 2, 3, \ldots, n_i - 1. \qquad (10)$$

Учитывая (5), (6) и (10), получаем неравенства

$$\lambda_j(\bar{N}_1) \leqslant \lambda_j(N_1) \leqslant \max n_i \lambda_j(\bar{N}_1); \qquad (11)$$

$$k(\bar{N}_1)/\max n_i \leqslant k(N_1) \leqslant \max n_i k(\bar{N}_1), \qquad (12)$$

где $\max n_i$ — максимальное число измеренных на каком-либо пунк[-]те сети направлений; $\bar{N}_1$ — матрица вида (2), т. е. получаемая при уравнивании углов без учета их коррелированности.

При уравнении углов между смежными направлениями имеютс два случая, для которых, как и для матриц типа (8), можно явном виде выписать собственные значения [2].

Если уравниваются углы без замыкания горизонта ($k=2$), т

$$Q_{i2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\lambda_j(Q_{i2}) = 4\cos^2\frac{\pi}{2n_i}j, \quad j = 1, 2, \cdots, n_i - 1. \tag{14}$$

Из (5), (6) и (14) находим для углов с подматрицами типа (13) неравенства

$$4\lambda_j(\bar{N}_2)\sin^2\frac{\pi}{2\max n_i} \leqslant \lambda_j(N_2) \leqslant 4\lambda_j(\bar{N}_2)\cos^2\frac{2}{2\max n_i},$$

$$k(\bar{N}_2)\operatorname{tg}^2\frac{2}{2\max n_i} \leqslant k(N_2) \leqslant k(\bar{N}_2)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2\max n_i}.$$

Если уравниваются углы между смежными направлениями с замыканием горизонта ($k=3$), то

$$Q_{i3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$\lambda_j(Q_{i3}) = \left\{ \begin{matrix} 4\cos^2\dfrac{\pi}{2n_i}j, & n_i - j \text{ — четное} \\ 4\cos^2\dfrac{\pi}{2n_i}(j-1), & n_i - j \text{ — нечетное} \end{matrix} \right\}, \tag{16}$$

$j=1, 2, \ldots, n_i$, причем $\lambda_{n_i}(Q_{i3})=0$, так как $\operatorname{rang} Q_{i3}=n_i-1$, и $0 \leqslant \lambda_j(Q_{i3}) \leqslant 4$, откуда следуют неравенства

$$0 \leqslant \lambda_j(N_3) \leqslant 4\lambda_j(\bar{N}_3), \; j=1, 2, \ldots, r. \tag{17}$$

Левая часть выражения (17) не позволяет получить оценки $k(N_3)$. Это и понятно, поскольку матрица N_3 должна соответствовать строгому уравниванию направлений. Но при уравнивании триангуляции по направлениям, как известно, число независимых условных уравнений меньше числа условий для углов ($k=3$) на число условий горизонта. Поэтому матрица N_3 оказывается вырожденной, и подобный алгоритм уравнивания не имеет практической ценности.

Заметим также, что для матриц типа (13) и (15) в случае необходимости можно в явном виде выписать и формулы для вычисления элементов собственных векторов [2].

Параметрический способ. Имеем матрицу коэффициентов A порядка $n \times m$ системы параметрических уравнений поправок и ковариационную матрицу Q уравниваемых величин, фигурировавшую при рассмотрении коррелатного уравнивания. Матрица коэффициентов системы нормальных уравнений [4]

$$M = A^T Q^+ A \tag{18}$$

ранга $\rho = \operatorname{rang} M \leqslant m$ порядка m, где Q^+ — псевдообратная к Q матрица, поскольку в общем случае Q предполагается неотрицательно определенной.

Если уравниваемые величины считать равноточными и независимыми, вместо (18) имеем матрицу

$$\bar{M} = A^T A. \tag{19}$$

Аналогично коррелатному уравниванию, применяя утверждения 1 и 2, получаем

$$\lambda_n(Q^+)\lambda_i(\bar{M}) \leqslant \lambda_i(M) \leqslant \lambda_i(\bar{M})\lambda_1(Q^+),$$
$$0 \leqslant \lambda_i(M) \leqslant \lambda_i(Q^+)\lambda_1(\bar{M}), \quad i = 1, 2, \cdots, \rho, \tag{20}$$

причем при $\lambda_1(Q^+) \leqslant 1$ имеем $\lambda_i(M) \leqslant \lambda_i(\bar{M})$. Если $\lambda_n(Q^+) \geqslant 1$, то $\lambda_i(M) \geqslant \lambda_i(\bar{M})$, откуда следует, что нарастание весов измерений приводит к росту собственных значений нормальной матрицы параметрического способа уравнивания [5].

Строгое уравнивание углов параметрическим способом, когда необходимыми неизвестными являются координаты пунктов, приводит при любом способе вычисления углов по измеренным направлениям к эквивалентным нормальным матрицам, которые равны матрице коэффициентов системы нормальных уравнений при уравнивании сети по направлениям с предварительным исключением поправок ориентирования по Шрейберу. По этой причине индекс k, введенный в коррелатном уравнивании, для матрицы M можно опустить. Следует также учесть, что ненулевые собственные значения матриц Q и Q^+ взаимно обратны.

Тогда для $k=1$ имеем

$$\lambda_j(\bar{M}_1)/\max n_i \leqslant \lambda_j(M) \leqslant \lambda_j(\bar{M}_1), \quad j = 1, 2, \cdots, \rho,$$
$$k(\bar{M}_1)/\max n_i \leqslant k(M) = \lambda_1(M)/\lambda_\rho(M) \leqslant \max n_i\, k(\bar{M}_1).$$

Для $k=2$

$$\lambda_j(\bar{M}_2)/4\cos^2\frac{\pi}{2\max n_i} \leqslant \lambda_j(M) \leqslant \lambda_j(\bar{M}_2)/4\sin^2\frac{\pi}{2\max n_i},$$

$$k(\bar{M}_2)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2\max n_i} \leqslant k(M) \leqslant k(\bar{M}_2)\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2\max n_i}.$$

Для $k=3$

$$0 \leqslant \lambda_j(M) \leqslant \lambda_j(\bar{M}_3)/4\sin^2\frac{\pi}{\max n_i}.$$

Последняя формула не позволяет найти оценку числа обусловленности. Аналогично коррелатному уравниванию, алгоритм строгого уравнивания углов между смежными направлениями с замыканием горизонта параметрическим способом оказывается нерациональным и приводит лишь к увеличению объема вычислений.

Попутно отметим следующий факт: поскольку при формировании матрицы $\bar{M}_3$ используются все углы, участвовавшие в формировании $\bar{M}_2$, то имеется равенство

$$\bar{M}_3 = \bar{M}_2 + D, \tag{21}$$

где D — симметричная неотрицательно определенная матрица. К (21) применимы известные теоремы о собственных значениях суммы матриц [3, 9]. Например, если имеется набор индексов, удовлетворяющий условиям

$$\begin{gathered} 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots i_t \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots j_t \leqslant m, \\ i_t + j_t \leqslant t + m, \end{gathered} \tag{22}$$

то

$$\sum_{s=1}^{t} \lambda_{i_s+j_s-s}(\bar{M}_3) \leqslant \sum_{s=1}^{t} \lambda_{i_s}(\bar{M}_2) + \sum_{s=1}^{t} \lambda_{j_s}(D). \tag{23}$$

Если выполняются условия (22) и неравенство $i_1+j_1 \geqslant m+2-t$, то

$$\sum_{s=1}^{t} \lambda_{i_s+j_s-s+t-m}(\bar{M}_3) \geqslant \sum_{s+1}^{t} \lambda_{\ s}(\bar{M}_2) + \sum_{s=}^{t} \lambda_{j_s}(D). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует целый ряд более простых выражений, например,

$$\lambda_j(\bar{M}_2) + \lambda_m(D) \leqslant \lambda_j(\bar{M}_3) \leqslant \lambda_j(\bar{M}_2) + \lambda_1(D),$$

$j = 1, 2, \ldots, m$.

Приведенные выражения для собственных значений и чисел обусловленности нормальных матриц могут быть полезны при анализе различных способов уравнивания и в других случаях геодезической практики.

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с. 2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с. 3. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — 280 с. 4. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. — М.: Недра, 1982. — 191 с. 5. *Тренков И.* Влияние на тяжестите на наблюденията върху характеристичните числа на нормалните матрицы. — В кн.: 30 год Центр. лаб. по высш. геод.: Сб. докл. юбилейной науч. сессии. София, 1980, с. 59—68. 6. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. — М.: Наука, 1970. — 564 с. 7. *Ostrowski A. M.* A quantitative formulation of Sylvester's law of inertia. — Proceedings of the National Academy of Science of USA, 1959, v. 45, № 5, p. 740—744. 8. *Thompson R. C.* Inertial properties of eigenvalues. — Journal of mathematical analysis and applications, 1973, v. 41, № 1, p. 192—198. 9. *Thompson R. C., Freede L. J.* On the eigenvalues of sums of Hermitian matrices. — Linear Algebra and its applications, 1971, v. 4, № 4, p. 369—376.

Статья поступила в редколлегию 15.04.85

УДК 528.28

А. В. ГОЖИЙ

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЗИМУТА НАПРАВЛЕНИЯ НА ЗЕМНОЙ ПРЕДМЕТ С ПОМОЩЬЮ ИНСТРУМЕНТА С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЗРИТЕЛЬНОЙ ТРУБОЙ

При построении Государственной геодезической сети азимуты направлений выходных сторон рекомендуют определять из многократных наблюдений ярких звезд вблизи меридиана, из наблюдений звезд в меридиане и по часовому углу Полярной [7]. Общим недостатком всех этих способов является необходимость измерения горизонтального угла между вертикалами звезды и земного предмета с помощью разделенного круга — процесса, в значительной мере обремененного влиянием систематических погрешностей, что, естественно, снижает точность определений азимута.

Отмеченного недостатка лишены микрометрические способы азимутальных определений, которые основаны на измерении малого угла между близко расположенными вертикалами звезды и земного предмета с помощью микрометра. Именно к микрометрическим способам обращаются чаще всего в тех случаях, когда необходимо определить азимут с повышенной точностью [6].

Однако и микрометрические способы (в том виде, в каком они применялись до настоящего времени) не обеспечивают существенного повышения точности азимутальных определений. Например, при микрометрических определениях азимута земного предмета по наблюдениям близполюсных звезд в элонгации на пассажном инструменте в Полтаве средняя квадратическая погрешность одного определения составила $\pm 0{,}44''$ [10].

Слабой стороной существующих микрометрических способов азимутальных определений является то, что в процессе выполнения микрометрических измерений изменяется положение инструмента в пространстве при визировании на звезду и на земной предмет, т. е. микрометрические измерения непрямые, что служит источником дополнительных систематических погрешностей. Чтобы устранить этот недостаток и тем самым улучшить точность