

Д. И. МАСЛИЧ

## ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТ ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО НИВЕЛИРОВАНИЯ В ГОРНО-ДОЛИННЫХ РАЙОНАХ

В настоящее время для создания высотной основы в горно-долинных районах с большими колебаниями высот чаще всего применяется геодезическое нивелирование, точность которого зависит от возможности учета влияния вертикальной рефракции. Известно, что в горно-долинных районах создаются особые метеорологические условия, обусловленные большими разностями температур, давлений и других метеорологических факторов на вершинах и в долинах, а также наличием горно-долинных ветров. Все это служит причиной образования здесь своеобразных рефракционных полей, которые приводят к появлению систематической ошибки в двухстороннем геодезическом нивелировании за счет разности коэффициентов рефракции на концах линии.

Учет этой ошибки путем сравнения прямого и обратного геодезического нивелирования по данной линии или по результатам одновременного измерения зенитных расстояний не представляется возможным. Ошибка же в превышениях может достигать значительной величины, что видно из формулы

$$\Delta h_k = \frac{k_2 \sin^2 z_2 - k_1 \sin^2 z_1}{4R} s^2, \quad (1)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — измеренные зенитные расстояния в конечных пунктах линии;

$k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты рефракции для этих пунктов;

$s$  — проекция линии нивелирования на эллипсоид;

$R$  — радиус кривизны нормального сечения эллипсоида вдоль линии нивелирования.

Так, при  $(k_2 - k_1) = 0,01$  и  $s = 10$  км  $\Delta h_k = 0,042$  м.

Для суждения о возможной величине этой систематической ошибки за рефракцию по фактически измеренным зенитным расстояниям были использованы материалы продолжительных наблюдений в районе Карпат (Долина—Выгода), выполненных в 1953—1955 гг. автором. Характеристика условий наблюдений и применяемая методика изложены в работе [2]. Из этих наблюдений использованы только одновременные измерения зенитных расстояний по линиям с разностью высот от 250 до 325 м. Вычисленные средние значения величин  $(k_2 - k_1)$  по отдельным часам для трех линий приведены в таблице.

Из данных таблицы видно, что разность коэффициентов  $(k_2 - k_1)$  в большинстве случаев имеет один знак, а их величина примерно одного порядка. Можно также отметить, что в первую половину дня эти значения больше, чем во вторую.

Значения средних разностей коэффициентов рефракции  
по линиям геодезического нивелирования в горно-долинном  
районе Карпат

Время наблюдений	Название линии	Долина—Оси Гарб $h=249,2 \text{ м}$	Брочков—Забуй $h=324,7 \text{ м}$	Брочков—Оси Гарб $h=309,4 \text{ м}$	Среднее
		$k_2 - k_1$	$k_2 - k_1$	$k_2 - k_1$	
8		0,013	0,053	0,033	0,033
9		0,018	0,035	0,069	0,041
10		-0,003	0,039	0,064	0,033
11		+0,056	0,054	0,081	0,064
12		0,028	0,042	0,089	0,053
13		0,029	0,028	0,092	0,050
14		0,034	0,032	0,088	0,051
15		0,038	0,031	0,018	0,029
16		-0,024	0,048	0,062	0,029
17		0,001	0,013	0,032	0,015
18		-0,032	0,041	0,073	0,027
19		-0,002	0,026	0,089	0,038
Среднее $k_2 - k_1$		+0,013	0,037	0,066	0,039

Однако по полученным значениям  $(k_2 - k_1)$  можно вычислить поправки  $\Delta h_k$  только для тех линий, по которым они определены. Вопрос о введении этой поправки в разных условиях требует специального рассмотрения.

В сообщении [5] на основании обработки обширного экспериментального материала методом математической статистики показано, что на коэффициенте рефракции наибольшее влияние оказывает вертикальный температурный градиент  $\gamma$  и высота луча над подстилающей поверхностью. Эта зависимость выражена следующим уравнением:

$$k = k_0 + \alpha + \beta + \nu\gamma + \delta h_s, \quad (2)$$

где  $k_0$  — коэффициент рефракции при заданных значениях  $\gamma$  и  $h_s$ ;  
 $h_s$  — эквивалентная высота луча над подстилающей поверхностью;  
 $\alpha$  и  $\beta$  — суммарное влияние суточного и годового хода коэффициента рефракции;  
 $\nu$  и  $\delta$  — коэффициенты.

Учитывая это, а также изложенное выше, выразим зависимость величины  $(k_2 - k_1)$  в функции от разности высот  $\Delta H$ , вертикального температурного градиента  $\gamma$ , высоты луча над подстилающей поверхностью  $h$ , температуры воздуха  $T$  и давления  $P$ , то есть

$$k_2 - k_1 = \Delta k = F(\Delta H, \gamma, h, T, P). \quad (3)$$

Для нахождения функции  $F$  используем следующее. Известно, что дифференциальный коэффициент рефракции  $x$  равен отношению радиуса Земли  $R_z$  к радиусу кривизны световой кривой  $r$  в данной точке.

$$x = \frac{R_z}{r}. \quad (4)$$

Исходя из принципа Ферма для радиуса кривизны, можно получить зависимость

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \quad (5)$$

или

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \sin z, \quad (5')$$

где  $n$  — показатель преломления в данной точке, а  $\frac{dn}{dh}$  — изменение показателя преломления по высоте.

Зависимость показателя преломления от основных метеорологических факторов выражается известной формулой

$$n = 1 + c \frac{\rho}{\rho_0} = 1 + c \frac{P T_0}{P_0 T}, \quad (6)$$

где  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$  — плотность, давление и абсолютная температура воздуха;  $\rho_0$  — плотность при нормальном давлении  $P_0 = 760$  мм и абсолютной температуре  $T_0 = 273^{\circ}2$ .

Дифференцирование формулы (6) по  $h$  дает:

$$\frac{dn}{dh} = c \frac{T_0}{P_0} \left[ \frac{1}{T} \frac{dP}{dh} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dh} \right], \quad (7)$$

но

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{Pg}{RT}. \quad (8)$$

Здесь  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>;  $R = 286,86$  м<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup> град.; постоянная  $\frac{g}{R} = 0,0342$  град/м называется атмоконвекционным градиентом температуры (градиент температуры в однородной атмосфере);  $\frac{dT}{dh}$  — вертикальный градиент температуры; следовательно,

$$\frac{dn}{dh} = -c \frac{T_0 P}{P_0 T^2} \left[ \frac{g}{R} + \frac{dT}{dh} \right] \quad (9)$$

и

$$z = R_3 \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \cdot \sin z = \frac{R_3}{n} \sin z c \frac{T_0 P}{P_0 T^2} \left[ \frac{g}{R} + \frac{dT}{dh} \right]. \quad (10)$$

Принимая для видимых лучей в среднем  $n = 1,000294$ ,  $c = 0,000292$  и, кроме того,  $R_3 = 6371$  км,  $P_0 = 760$  мм,  $T_0 = 273^{\circ}2$  С, получим

$$z = 668,7 \frac{P}{T^2} \left( 0,0342 + \frac{dT}{dh} \right) \sin z. \quad (11)$$

Во многих случаях  $\sin z$  можно принять равным 1, тогда

$$z = 668,7 \frac{P}{T^2} \left( 0,0342 + \frac{dT}{dh} \right). \quad (12)$$

Для получения из формулы (12) среднеинтегрального коэффициента рефракции вдоль траектории луча света необходимо знать среднеинтегральное значение вертикального температурного градиента. Но практические измерения этой величины сильно затруднены, поэтому при вычислениях пользуются такими значениями, которые характеризуют

принимаемую для данных условий вертикальную стратификацию воздуха.

В горных районах существуют многообразные метеорологические условия, но для наших целей при характеристике вертикальной стратификации мы будем руководствоваться высотой визирного луча над подстилающей поверхностью.

Исходя из этого, будем рассматривать два характерных случая (имеющих различные стратификации):

- 1) пункты располагаются на отдельных вершинах, где средняя высота визирного луча над подстилающей поверхностью не менее 70 м;
- 2) смежные пункты располагаются на вершинах и горных долинах, где средняя высота визирного луча 20—30 м.

Принято считать высоту приземного слоя воздуха равной 50—100 м [3]. Выше этого слоя изменение температуры с высотой происходит линейно при среднем вертикальном градиенте 0,0065 град/м. Такую атмосферу называют стандартной. Таким образом, для первой стратификации величина среднего коэффициента рефракции будет определяться значением

$$\frac{dT}{dh} = -\gamma = -0,0065 \text{ град/м},$$

то есть

$$k' = 668,7 \frac{P}{T^2} (0,0342 - 0,0065) = 18,52 \frac{P}{T^2}. \quad (13)$$

Для второй стратификации с некоторыми допущениями можно выразить вертикальный градиент температуры через нормальную и аномальную часть, как это сделано в исследовании А. А. Изотова и Л. П. Пеллинена [1]:

$$\frac{dT}{dh} = a + \frac{c}{h}, \quad (14)$$

где  $a$  — нормальная часть градиента температуры;  $c$  — аномальная часть;

$h$  — высота текущей точки светового луча над подстилающей поверхностью.

Для среднего коэффициента рефракции в этом случае запишем

$$k'' = 667,7 \frac{P}{T^2} (0,0342 - 0,0065) + 668,7 \frac{P}{T^2} \frac{2}{S^2} \int_0^s \frac{c}{h} l dl, \quad (15)$$

где  $l$  — расстояние от текущей точки светового луча до визирной цели;  $s$  — длина светового луча.

Будем полагать аномальную часть градиента постоянной в момент измерений для любой вертикали на всем протяжении визирного луча. Кроме того, следуя А. А. Изотову и Л. П. Пеллинену [1], введем значение эквивалентной высоты  $h_e$ , удачно характеризующей условия прохождения визирного луча и определяемой из равенства

$$\frac{1}{h_e} = \frac{2}{S^2} \int_0^s \frac{1}{h} l dl.$$

Таким образом, для  $k''$  найдем

$$k'' = 18,52 \frac{P}{T^2} + 668,7 \frac{P}{T^2} \frac{c}{h_a}. \quad (16)$$

Сравнивая полученные формулы, видим, что если для первой стратификации (формула (13)) коэффициент рефракции определяется только изменениями давления и температуры, то для второй стратификации (формула (16)) на результаты его определения оказывает также влияние высота луча и аномальная часть вертикального температурного градиента.

С учетом этих обстоятельств рассмотрим, как будет выражаться разность коэффициентов рефракции ( $k_2 - k_1$ ) для смежных пунктов, имеющих значительную разность высот.

Для первой стратификации, полагая пункт 2 нижним, а пункт I верхним, получим

$$\Delta k' = k_2 - k_1 = 18,52 \frac{P_2}{T_2^2} - 18,52 \frac{P_1}{T_1^2} = 18,52 \left[ \frac{P_2}{T_2^2} - \frac{P_1}{T_1^2} \right]. \quad (17)$$

Для стандартной атмосферы зависимость между давлениями верхней и нижней точки может быть выражена формулой

$$\frac{P_1}{P_2} = \left[ \frac{T_1}{T_2} \right]^{\frac{g}{R_1}} = \left[ 1 - \frac{\gamma \Delta H}{T_2} \right]^{\frac{g}{R_1}}. \quad (18)$$

Для наших целей можно принять

$$P_1 = P_2 \left[ 1 - \frac{273 \Delta H}{8000 T} \right] \approx P_2 \left[ 1 - \frac{\Delta H}{29 T} \right], \quad (19)$$

где

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Зависимость температуры верхней точки от нижней для тех же условий можно выразить простой формулой

$$T_1 = T_2 - 0,0065 \Delta H. \quad (20)$$

Подставляя полученные значения для  $P_1$  и  $T_1$  в формулу (17), найдем

$$\Delta k' = 18,52 \left[ \frac{P_2}{T_2^2} - \frac{P_2 \left( 1 - \frac{\Delta H}{29 T} \right)}{\left( T_2 - 0,0065 \Delta H \right)^2} \right]. \quad (21)$$

После некоторых преобразований можно получить:

$$\Delta k' = 0,64 \frac{P_2}{T_2^2} \Delta H \left( \frac{0,623}{T_2} + \frac{0,0093 \Delta H}{T_2^2} + \dots \right). \quad (22)$$

Опуская индексы, с некоторыми приближениями формулу (22) можно записать в таком виде:

$$\Delta k' \approx 0,4 \frac{P \Delta H}{T^3}. \quad (23)$$

Полагая в последней формуле  $\Delta H = 500 \text{ м}$ ;  $t_2 = 15^\circ$ ;  $P_2 = 720 \text{ мм}$ , получим для  $\Delta k' = 0,006$ , что дает для  $s = 10 \text{ км}$ ,  $\Delta h_k = 0,024 \text{ м}$ , а для  $s = 15 \text{ км}$   $\Delta h_k = 0,054 \text{ м}$ , то есть такие поправки, которые необходимо учитывать.

Для проверки формулы (23) были использованы материалы определений  $k$  для различных абсолютных высот на пунктах триангуляции в Восточной Сибири, выполненные И. И. Садовским в работе [4]. Оказалось, что вычисляемые по формуле и фактически полученные изменения величины  $k$  в работе [4, табл. 2] очень близки. Несколько большие значения величин  $k$  в работе [4] объясняются дополнительным влиянием высоты луча и аномальной части вертикального температурного градиента, что будет показано ниже.

При второй стратификации для разности коэффициентов рефракции нижнего (2) и верхнего (1) пунктов запишем

$$\Delta k'' = k_2'' - k_1'' = 18,52 \frac{P_2}{T_2^2} + 668,7 \frac{P_2 c_2}{T_2^2 h_{\vartheta 2}} - 18,52 \frac{P_1}{T_1^2} - 668,7 \frac{P_1 c_1}{T_1^2 h_{\vartheta 1}} \quad (24)$$

или

$$\Delta k'' = 18,52 \left[ \frac{P_2}{T_2^2} - \frac{P_1}{T_1^2} \right] + 668,7 \left[ \frac{P_2 c_2}{T_2^2 h_{\vartheta 2}} - \frac{P_1 c_1}{T_1^2 h_{\vartheta 1}} \right]. \quad (24')$$

Первая часть (I) формулы (24') есть величина, определяемая формулой (22) или (23), вторая часть (II) формулы (24') после подстановки значений  $P_1$  и  $T_1$  из формулы (19) и (20) будет иметь вид

$$\text{II} = 668,7 \left[ \frac{P_2 c_2}{T_2^2 h_{\vartheta 2}} - \frac{P_1 c_1}{T_1^2 h_{\vartheta 1}} \right] = 668,7 \left[ \frac{P_2 c_2}{T_2^2 h_{\vartheta 2}} - \frac{P_2 \left(1 - \frac{\Delta H}{29T}\right)}{(T_2 - 0,0065 \Delta H)^2} \frac{c_1}{h_{\vartheta 1}} \right]. \quad (25)$$

Проведя некоторые преобразования, получим

$$\text{II} = 668,7 \frac{P_2 c_2 h_{\vartheta 1} - c_1 h_{\vartheta 2}}{T_2^2 h_{\vartheta 1} h_{\vartheta 2}} + 15,3 \frac{P_2 c_1}{T_2^3 h_{\vartheta 1}} \Delta H - 8,7 \frac{P_2 c_2}{T_2^4 h_{\vartheta 2}} \Delta H^2 + \dots \quad (26)$$

Принимая  $c_1 = c_2 = c$  и обозначив  $h_{\vartheta 1} - h_{\vartheta 2} = \Delta h_\vartheta$  получим

$$\text{II} \approx 668,7 \frac{P_2 c}{T_2^2} \left[ \frac{\Delta h_\vartheta}{h_{\vartheta 1} h_{\vartheta 2}} + 0,023 \frac{1}{T_2 h_{\vartheta 1}} \Delta H - 0,013 \frac{1}{T_2^2 h_{\vartheta 2}} \Delta H^2 \right]. \quad (27)$$

С учетом последнего формула (24') запишется так:

$$\Delta k'' \approx 0,4 \frac{P \Delta H}{T^3} + 668,7 \frac{P c}{T^2} \left[ \frac{\Delta h_\vartheta}{h_{\vartheta 1} h_{\vartheta 2}} + 0,023 \frac{\Delta H}{T h_{\vartheta 1}} - 0,013 \frac{\Delta H^2}{T^2 h_{\vartheta 2}} \right]. \quad (28)$$

Полагая в этой формуле  $P = 720 \text{ мм}$ ,  $T = 290^\circ$ ,  $\Delta H = 300 \text{ м}$ ,  $c = 0,3 \text{ град/м}$ ,  $\Delta h_\vartheta = 20 \text{ м}$ ,  $h_{\vartheta 1} = 50 \text{ м}$ ,  $h_{\vartheta 2} = 30 \text{ м}$ , получим для  $\Delta k'' = 0,025$ , что дает при  $s = 10 \text{ км}$ ,  $\Delta h_k = 0,09 \text{ м}$ , а при  $s = 15 \text{ км}$ ,  $\Delta h_k = 0,21 \text{ м}$ .

Легко убедиться, что основным членом формулы (28) является второй. Следовательно, во втором случае решающее значение имеет разность эквивалентных высот. А это значит, что при передаче высот геодезическим нивелированием следует по возможности избегать линий с асимметричным профилем.

Таким образом, полученные формулы (23) и (28) определяют характер функции  $F(\Delta H, \psi, h, T, P)$  в уравнении (3). Они позволяют учесть с необходимой степенью точности систематическое влияние рефракции на превышение по линиям с большой разностью высот. Для

практического их использования достаточно составить рабочие таблицы, приняв для определенных физико-географических условий и сезона значения величин  $P$ ,  $T$ ,  $c$ . Эквивалентные высоты могут быть легко определены с помощью топографических карт масштабов 1:25 000—1 : 100 000.

Кроме того, формула (28) в горной и холмистой местности позволяет судить о величине и характере изменения коэффициента рефракции от направления к направлению по линиям, выходящим из одного пункта, но существенно отличающимся условиями прохождения визирного луча.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Изотов А. А. и Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 102. Геодезиздат, 1955.
2. Маслич Д. И. О точности геодезического нивелирования в горных условиях. Львов, 1957.
3. Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1965.
4. Садовский И. И. О зависимости коэффициента вертикальной рефракции от абсолютной высоты земной поверхности. «Геодезия и картография», 1966, № 11.
5. Хижак Л. С., Маслич Д. И. Исследование годового хода коэффициента рефракции. Межвед. республ. научно-техн. сборник «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львовского ун-та, 1967.

Работа поступила  
22 ноября 1968 г.