Это явление называют асимметрией астрономической рефракции. Ее причинами, как известно [6], могут быть наклоны слоев воздуха одинаковой плотности и достаточно мощные инверсии температуры (наблюдаемые как раз в ночное время).

Обычно при объяснении причин асимметрии рефракции недостаточное внимание уделяют влиянию подстилающей поверхности на распределение метеопараметров в приземном слое воздуха. Резкие переходные зоны на подстилающей поверхности (суша—вода, лес—степь, гора—равнина), очевидно, оказывают определяющие влияния на стратификацию приземного слоя воздуха ($H \leqslant 2$ км).

В нашем случае имеет место такая наиболее резко выраженная по силе влияния на приземный слой воздуха переходная зона, как суша — водная поверхность.

Из метеорологии известно, что водная поверхность обладает свойством сглаживать температурные инверсии. А это означает, что над водной поверхностью строение атмосферы будет близко нормальному, принимаемому при построении таблиц рефракции. В таком случае можно надеяться, что аномалии рефракции над водной поверхностью на малых зенитных расстояниях будут небольшими или вообще отсутствовать. Это и подтверждается нашими определениями рефракции по западным звездам.

Над сушей в ночное время наблюдаются мощные инверсии температуры высотой до 800...1200 м. Но при построении таблиц рефракции (в частности, Пулковских) явление инверсии температуры не учитывается (обычно принимается нормальный градиент температуры 0,65 °С на 100 м).

В то же время известно [1, 7, 8], что инверсия температуры увеличивает значение рефракции, т. е. можно ожидать появления положительных аномалий рефракции. Из табл. 1 и 2 видно, что в нашем случае это имеет место. Кроме того, мы не можем исключить и влияния наклонов поверхностей одинакового показателя преломления (изодиоптрических) в приземном и, возможно, пограничном слоях воздуха, которые в определенной степени следуют наклонам местности (рельефу). Если воспользоваться известным соотношением поправки в рефракцию за наклон изодиоптрических поверхностей

$$\Delta\rho_i = 0'',0175 \cdot i \cdot \cos(A - A_0) \sec^2 z, \tag{7}$$

где i — наклон нормали изодиоптрической поверхности в минутах дуги; A — азимут светила; A_0 — азимут наклона нормали; z — зенитное расстояние светила, то приняв в нашем случае $A = A_0 = 90$, $i = 8° = 480'$, $z = 40°$ и предположив, что наклон местности вызывает эквивалентный наклон изодиоптрических поверхностей во всей эффективной толще атмосферы, получим $\Delta\rho \approx 14''$, что также подтверждает полученные экспериментальные данные.

Таким образом, наблюдая звезды на одних и тех же зенитных расстояниях, мы выявили различные значения рефракции в зависимости от азимута наблюдаемого светила, объяснимые различным влиянием подстилающей поверхности, т. е. асимметрию рефракции относительно зенита.

1. *Василенко Н. А.* Определение астрономической рефракции у горизонта в различные периоды года. — Астрономия и астрофизика, 1972, т. 17, с. 42—48. 2. *Василенко Н. А.* Анализ аномалий астрономической рефракции. — Астрономический циркуляр, 1974, № 840, с. 3—8. 3. *Мазаев А. В.* Исследование астрономической рефракции по материалам наблюдений. — Вестник ВИКА им. В. В. Куйбышева, 1955, № 88, с. 71—76. 4. Таблицы по геодезической астрономии. — Тр. ЦНИИГАиК, 1963, вып. 163, с. 89—122. 5. *Киричук В. В.* Исследование астрономической рефракции вблизи горизонта: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Л., 1972, с. 22. 6. *Крат В. А.* К вопросу о рефракционных аномалиях. — Астрономический журнал, 1934, т. 11, № 2, с. 34—41. 7. *Колчинский И. Г.* Исследование рефракции света в земной атмосфере: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — К., 1968. — 49 с.

Статья поступила в редколлегию 30. 04. 85

УДК 528.16

Н. А. ЛОШКАРЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОЙ НЕВЯЗКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

При построении инженерных геодезических сетей специального назначения часто возникает необходимость в жестком контроле результатов измерений для обнаружения систематического влияния, изменяющего дисперсии измеряемых величин или их математические ожидания. Ограниченные возможности контроля по внутренней сходимости связаны именно с невозможностью обнаружения систематических ошибок, поэтому контроль измерений по значениям невязок является наиболее надежным методом оценки их качества. Допустимые невязки рассчитывают обычно, исходя из независимости и нормальности ошибок измерений, принимая в качестве предельных двойную (вероятность 95%) или тройную ошибки.

Однако в геодезической практике до настоящего времени не принято рассматривать систему невязок в совокупности и тем самым применять критерии случайности ряда наблюдаемых величин. Наиболее удобен для этой цели $\varkappa^2$-критерий, позволяющий вычислять сумму квадратов нормированных стандартами случайных величин, имеющую центральное $\varkappa^2$-распределение. Попадание вычисленной суммы квадратов в критическую область с принятой вероятностью интерпретируется как неравенство нулю математического ожидания ошибок (систематическое влияние) или как увеличение стандартных ошибок, т. е. понижение точности измерений. Непосредственному применению этой процедуры препятствуют два обстоятельства — невязки не являются независимыми, так как обычно включают общие измерения; при составлении условных уравнений возможны неравноценные варианты.

Задача, следовательно, заключается в разработке такой методики комплексного оценивания качества измерений по невязкам, чтобы конечные оценки не зависели от избранного варианта системы условных уравнений, а определялись бы только наличными результатами измерений. Формально задачу решают преобразованием вектора измеренных величин l размера n в вектор невязок v размера m при условии минимума дисперсий. Как известно, если $m \leqslant n$, это преобразование единственно и применяется для уравнивания измерений. Таким образом можно найти наилучшие (в смысле способа наименьших квадратов) оценки свободных членов условных уравнений, например, параметрическим способом, а затем проверить гипотезу нулевого математического ожидания вектора оценок. Заметим, что предположение нормальности ошибок измерений не имеет в наших рассуждениях принципиального значения, так как вместо оценок по методу наименьших квадратов следует брать оценки по методу максимального правдоподобия, а вместо $\varkappa^2$-распределения, другие, соответствующие исходному. Но, как известно, при должной организации измерений ошибки их достаточно хорошо описываются именно нормальным распределением, все допуски и последующее применение способа наименьших квадратов при уравнивании предполагает нормальность ошибок.

Итак, пусть вектор «измеренных» величин (все исходные величины: координаты, углы, расстояния и пр.) имеет ковариационную матрицу K_{ll}. Найдем матрицу производных вектора свободных членов v по вектору «измеренных» величин l

$$A = \frac{\partial v}{\partial l}, \qquad (1)$$

размера $(m \times n)$ и вычислим ковариационную и весовую матрицы вектора невязок

$$K_{vv} = A \cdot K_{ll} \cdot A^T; \qquad (2)$$

$$P_{vv} = (A \cdot K_{ll} \cdot A^T)^{-1}. \qquad (3)$$

Применяя параметрический способ, вычислим уравненные значения вектора свободных членов

$$\bar{v} = \tilde{v} + (B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot (l - \tilde{l}), \qquad (4)$$

где $\tilde{v}$ — вектор приближенных значений невязок; $\tilde{l}$ — вектор приближенных значений «измеренных» величин, соответствующий вектору $\tilde{v}$; B — матрица производных $\frac{\partial l}{\partial v}$ размера $(n \times m)$.

Весовая матрица уравненного вектора невязок $\bar{v}$ имеет вид

$$Q_{\bar{v}\bar{v}} = (B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B). \qquad (5)$$

Пользуясь тем, что вес среднего значения является суммарным, можно записать

$$\frac{\det (B^T \cdot K_{ll}^{-1} \cdot B)}{\det (A \cdot K_{ll} \cdot A^T)^{-1}} \geqslant 1, \qquad (6)$$

так как определитель весовой матрицы случайного вектора равен квадрату его обобщенного веса [1].

Для построения критической области вектора v найдем квадрат его полной нормированной длины

$$\varkappa^2 = v^T \cdot P_{vv} \cdot v, \qquad (7)$$

который имеет $\varkappa^2$-распределение с числом степеней свободы m, равным его размерности. В соответствии с этим гипотеза о нулевом математическом ожидании вектора v принимается с вероятностью $P_\alpha = (1 - \alpha)$, если наблюденное значение квадрата нормированной длины вектора средних невязок больше критического значения, определяемого по таблицам $\varkappa^2$-распределения с уровнем значимости α при числе степеней свободы m

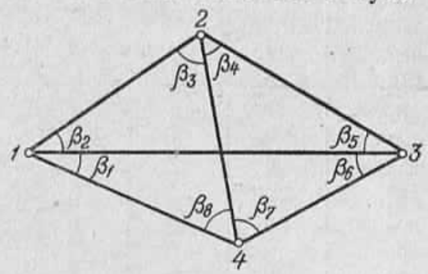

Схема сети.

$$M[v] = 0, \text{ если } \bar{v}^T \cdot P_{\bar{v}\bar{v}} \cdot \bar{v} \leqslant \chi^2_{\alpha; m}. \qquad (8)$$

Следует заметить, что вектору $\bar{v}$ соответствует весовая матрица $P_{\bar{v}\bar{v}}$ и, следовательно, наблюденное значение квадрата полной нормированной невязки сети не зависит от избранного вида системы условных уравнений. Это означает, что полная невязка полигонометрического хода останется неизменной независимо от того, вычислялась она по измеренным или предварительно исправленным величинам и в какой бы точке она ни вычислялась.

Как видим, условие (8) универсально, вычисляемый квадрат абсолютной невязки — величина безразмерная (отвлеченная) и, следовательно, не зависит от вида (размерностей) измеренных в геодезической сети величин. К тому же применение параметрического способа позволяет учесть и ковариационную матрицу «исходных данных» (дирекционных углов, координат и т. п.).

Рассмотрим пример использования описанной методики для расчета полной невязки сети (см. рисунок). Восемь углов геодезического четырехугольника получены из независимо измеренных направлений с дисперсией каждого направления, равной $\sigma^2 = 0{,}5 \times 10^{-10}$ рад. Ковариационная матрица измеренных углов приведена в табл. 1 в масштабе 1×10^{10}. При этом дисперсии измеренных углов равны 1, а ковариации смежных углов равны —0,5.

Значения «измеренных» углов и их истинные значения приведены в табл. 2. Нормальные ошибки измеренных направлений взяты из таблицы нормальных случайных ошибок [1].

Составим четыре уравнения невязок

$$\beta_1 + \beta_5 + \beta_7 + \beta_8 - \pi = v_1,$$

$$\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 - \pi = v_2,$$

$$\beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 - \pi = v_3,$$

$$\frac{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_3 \cdot \sin\beta_5 \cdot \sin\beta_7}{\sin\beta_2 \cdot \sin\beta_4 \cdot \sin\beta_6 \cdot \sin\beta_8} - 1 = v_4.$$

Таблица 1

Ковариационная матрица измеренных величин

l	l^T: β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8
β_1	1	−0,5	0	0	0	0	0	0
β_2	−0,5	1	0	0	0	0	0	0
β_3	0	0	1	−0,5	0	0	0	0
β_4	0	0	−0,5	1	0	0	0	0
β_5	0	0	0	0	1	−0,5	0	0
β_6	00	0	0	0	−0,5	1	0	0
β_7	0	0	0	0	0	0	1	−0,5
β_8	0	0	0	0	0	0	−0,5	1

Таблица 2

Ошибки направлений и измеренные углы

Точки	Направления	Ошибки (10^{-5} рад)	Углы β	Ошибки углов	„Измеренные" углы	tg β	ctg β
1	1—2	0,33	β_2	0,07	0,284731134	0,293	3,413
	1—3	0,40	β_1	−0,71	0.523912243	0,579	1,727
	1—4	−0,31					
2	2—3	−0,63					
	2—4	0,07	β_4	−0,56	1,107143121	1,999	0,500
	2—1	−0,26	β_3	−0,33	1,390938526	5,502	0,182
3	3—4	1,48					
	3—1	−0,48	β_6	−1,00	0,748368038	0,928	1,078
	3—2	1,64	β_5	1,16	0,358782268	0,375	2,267
4	4—1	1,98					
	4—2	0,83	β_8	−1,15	0,941997531	1,375	0,727
	4—3	0,58	β_7	−0,25	0,927283715	1,333	0,750

Значения производных невязок по измеренным величинам приведены в табл. 3. В последнем столбце этой таблицы приведены и невязки в масштабе 1×10^5. Применив (3), получим весовую матрицу невязок сети (табл. 4). Для принятых четырех невязок вычислим наблюденное значение χ^2-критерия

$$v^T \cdot P_{vv} \cdot v = 3{,}90,$$

Таблица 3

Производные невязок по углам и невязки сети

v	l^T: β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	v
v_1	1	0	0	0	0	1	1	1	−3,11
v_2	0	1	1	1	1	0	0	0	0,34
v_3	0	0	0	1	1	1	1	0	−1,55
v_4	1,727	−3,416	−0,182	−0,500	2,267	−1,078	0,750	−0,727	2,22

а при $P_\alpha = 0{,}95$ и $m = 4$ критическое значение $\chi^2_{05;4} = 9{,}49$ и наблюденные невязки следует считать допустимыми. Но избранный вариант невязок не единственный и не учитывает всех возможных их комбинаций. Как известно, например, при составлении полюсного условия не все варианты равноценны, а приведенный в примере не лучший. Поэтому найдем средние невязки параметрическим способом. Примем приближенные значения невязок $\tilde{v}_1 = 0$ и $\tilde{v}_2 = 0$. Эти значения получены при условии, что приближенные

Таблица 4

Весовая матрица невязок сети

v	v^T: v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0,25	0,07	−0,19	−0,01
v_2	0,07	0,35	−0,24	−0,06
v_3	−0,19	−0,24	0,41	0,04
v_4	−0,01	−0,06	0,04	0,04

значения углов $\beta_1 \ldots \beta_4$ и β_6, β_7 равны измеренным, а β_5 и β_8 приняты такими, что обеспечивают нулевые невязки $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$. Следовательно, приближенное значение невязки $\tilde{v}_3 = 1{,}79$, а полюсного условия $\tilde{v}_4 = -0{,}67$.

Матрица производных измеренных углов по невязкам приведена в табл. 5 (величины их обратны производным из табл. 2). В последнем столбце табл. 5 приведены разности измеренных и приближенных значений углов. По формулам (4) и (6) вычисляем поправки в приближенные значения невязок и весовую матрицу средних невязок сети (табл. 6), а применив (7), получаем квадрат полной средней невязки сети, который составляет $\chi^2 = 32{,}10$ и тем самым превышает критическое значение, свидетельствуя о наличии систематических ошибок в измеренных направлениях. Вычислим квадрат полной невязки сети, составив полюсное условие

$$\frac{\sin 5 \cdot \sin(7+8) \cdot \sin 3}{\sin(3+4) \cdot \sin 6 \cdot \sin 8} - 1 = v_4,$$

а первые три условия оставим теми же, что и в предыдущем примере. При этом полюсном условии и прежних приближенных значениях углов приближенное значение невязки $\tilde{v}_4 = -0{,}47 \times 10^{-5}$, а последний столбец табл. 5 изменится в соответствии с новыми производными измеренных углов по невязке полюсного условия, и изменятся средние невязки и их весовая матрица. В этом варианте условных уравнений весовая матрица средних невязок и сами невязки иные (табл. 7), но квадрат полной невязки сети остается прежним $\chi^2 = 31{,}88$.

Таблица 5

Матрица производных углов по невязкам сети

l	v^T: v_1	v_2	v_3	v_4	$(l-\tilde{l})$
β_1	1	0	0	0,579	0
β_2	0	1	0	−0,293	0
β_3	0	1	0	5,502	0
β_4	0	1	1	−1,999	0
β_5	0	1	1	0,375	0,2376
β_6	1	0	1	−0,928	0
β_7	1	0	1	1,333	0
β_8	1	0	0	−1,375	−3,1152

Таблица 6

Весовая матрица средних невязок сети и средние невязки

v	v^T: v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	−0,50
v_2	1,33	6,67	4,00	6,88
v_3	4,00	4,00	6,67	0,76
v_4	−0,50	6,88	0,76	34,68
$\tilde{v}^T$	0	0	1,7911	−0,6735
∂v^T	−1,2109	−0,1223	0,5570	0,0790
$\bar{v}^T$	−1,2109	−0,1223	2,3781	−0,5945

Таблица 7

Весовая матрица второго варианта средних невязок сети

v	v^T: v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	6,67	1,33	4,00	−16,74
v_2	1,33	5,67	4,00	13,89
v_3	4,00	4,00	6,67	−3,35
v_4	−16,74	13,89	−3,35	122,64
$\tilde{v}^T$	0	0	1,79	−0,47
∂v^T	−0,58	−0,70	0,64	0,23
$\bar{v}^T$	−0,58	−0,70	2,43	−0,24

Таким образом, метод расчета полной невязки геодезической сети включает разнородные измерения. Усредненная (в смысле наименьших квадратов) полная невязка сети не зависит от избранной системы условных уравнений. Квадрат абсолютной невязки геодезической сети можно использовать для обнаружения систематического влияния ошибок измеренных величин.

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
2. *Лошкарев Н. А., Перепечкин А. А.* Применение χ^2-критерия для построения критической области многомерных случайных векторов невязок и смещений точек. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1984, вып. 40, с. 51—58.

Статья поступила в редколлегию 21. 04. 84

УДК 528.11+519.281.2

Б. Ф. МАГУСЬКИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИНЦИПА НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА

В настоящее время при обосновании методов математической обработки наблюдений широко применяется метод максимального правдоподобия или другие способы, являющиеся развитием первого Гауссовского обоснования метода наименьших квадратов. Второе же обоснование Гаусса, основанное на принципе наибольшего веса, используется все реже. Некоторое объяснение этому явлению, по-видимому, может дать анализ современного состояния принципа наибольшего веса. Результаты такого анализа могут также представлять самостоятельный интерес, поскольку и сейчас имеется много сторонников второго обоснования. Широко распространено ошибочное представление о безупречности этого обоснования. Цель настоящей статьи — показать, что обоснование принципа наибольшего веса имеет существенный недостаток, который не был устранен дальнейшими исследованиями. Попутно сделаны некоторые обобщения в основной теореме.

В большинстве случаев основная задача математической обработки наблюдений заключается в следующем. Измерены n функции от k искомых неизвестных ($k<n$). Требуется определить наилучшие значения неизвестных, т. е. такие значения, которые по возможности содержат наименьшие в том или ином смысле ошибки.

Принцип наибольшего веса, применяемый для решений этой задачи, заключается в требовании, чтобы полученные значения неизвестных обладали наибольшим весом. Как известно, под весом понимается величина, обратно пропорциональная дисперсии результатов измерений

$$p = \sigma_0^2/\sigma^2, \qquad (1)$$

где p — вес; σ^2 — дисперсия; σ_0^2 численно равна дисперсии измерений, вес которых принят равным единице. Эта величина может быть как размерной, так и безразмерной [2].

Своим возникновением принцип наибольшего веса, как уже говорилось, обязан Гауссу. В 1821 г. была опубликована знаменитая Гауссовская «Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам», в которой излагается второе обоснование, основанное на принципе наибольшего веса. Таким образом,