УДК 528.11+519.281.2

Б. Ф. МАГУСЬКИН

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИНЦИПА НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА

В настоящее время при обосновании методов математической обработки наблюдений широко применяется метод максимального правдоподобия или другие способы, являющиеся развитием первого Гауссовского обоснования метода наименьших квадратов. Второе же обоснование Гаусса, основанное на принципе наибольшего веса, используется все реже. Некоторое объяснение этому явлению, по-видимому, может дать анализ современного состояния принципа наибольшего веса. Результаты такого анализа могут также представлять самостоятельный интерес, поскольку и сейчас имеется много сторонников второго обоснования. Широко распространено ошибочное представление о безупречности этого обоснования. Цель настоящей статьи — показать, что обоснование принципа наибольшего веса имеет существенный недостаток, который не был устранен дальнейшими исследованиями. Попутно сделаны некоторые обобщения в основной теореме.

В большинстве случаев основная задача математической обработки наблюдений заключается в следующем. Измерены n функции от k искомых неизвестных $(k<n)$. Требуется определить наилучшие значения неизвестных, т. е. такие значения, которые по возможности содержат наименьшие в том или ином смысле ошибки.

Принцип наибольшего веса, применяемый для решений этой задачи, заключается в требовании, чтобы полученные значения неизвестных обладали наибольшим весом. Как известно, под весом понимается величина, обратно пропорциональная дисперсии результатов измерений

$$p=\sigma_0^2/\sigma^2, \tag{1}$$

где p — вес; σ^2 — дисперсия; σ_0^2 численно равна дисперсии измерений, вес которых принят равным единице. Эта величина может быть как размерной, так и безразмерной [2].

Своим возникновением принцип наибольшего веса, как уже говорилось, обязан Гауссу. В 1821 г. была опубликована знаменитая Гауссовская «Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам», в которой излагается второе обоснование, основанное на принципе наибольшего веса. Таким образом, Гаусс отказался от своего первого обоснования в пользу второго. Сам он пишет по этому поводу в письме к Бесселю: «То, что я впоследствии отказался от метафизики способа наименьших квадратов, приведенной в «Теории движения», произошло, главным образом, по причине, о которой я сам публично не упоминал. Именно, я считаю менее важным отыскание такого значения неизвестной величины, вероятность которой максимальна, но всегда остается бесконечно малой, нежели того, с которым можно получить верную игру; иными словами, если $f(a)$ обозначает вероятность значения a для неизвестного x, то представляется менее важным привести к максимуму $f(a)$, нежели к минимуму интеграл $\int f(x) \times \times F(x-a)\,dx$, распространенный на все возможные значения x, в котором за F берется функция всегда положительная и подходящим образом увеличивающаяся» [1].

Принцип наибольшего веса базируется на понятии дисперсии ошибки (Гаусс называет ее квадратом средней ошибки). Из двух систем наблюдений точнее та (в заданном смысле), для которой дисперсия погрешностей меньше. Гаусс указывает [3] на произвольность такого подхода и на его преимущества: «Подобно тому как интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx$ (через $\varphi(x)$ обозначена плотность вероятности ошибки x. — *Б. М.*), или среднее значение x, указывает или на наличие, или на отсутствие систематической ошибки и на значение ее, так и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx$ в пределах от $x=-\infty$ до $x=+\infty$ (или среднее значение x^2) указывает наилучшим образом на надежность наблюдений как с точки зрения определения их, так и измерения. Поэтому из двух систем неравноточных наблюдений надо считать более точными те, для которых интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx$ принимает меньшее значение. Если кто-нибудь возразит, что этот принцип принят произвольно, без особой для того надобности, то мы охотно с этим согласимся. Интересующий нас вопрос по самой своей природе содержит в себе нечто неопределенное, что может быть ограничено известными пределами и в некоторой степени произвольным правилом. Определение из наблюдений какой-либо величины, содержащей более или менее крупные ошибки, вполне возможно сравнить с игрой на счастье, в которой можно только проигрывать, но не выигрывать, в которой, следовательно, каждая ожидаемая ошибка соответствует проигрышу. Риск в такой игре оценивается по вероятному проигрышу, то есть по сумме произведений отдельных возможных проигрышей на соответствующие их вероятности. Но какому проигрышу нужно приравнять отдельную ошибку наблюдений, это остается отнюдь неясным; решение, как лучше поступить, зависит частично от нашего произвола. Очевидно, не следует приравнять проигрыш самой ошибке; если, однако, положительные ошибки принимаются за проигрыш, то отрицательные должны представлять собой выигрыш. Величина проигрыша должна быть выражена такой функцией ошибок, которая по природе своей всегда остается положительной. При бесконечном многообразии таких функций, простейшей, обладающей таким свойством и заслуживающей предпочтение перед другими, несомненно, является квадратичная функция. Итак, высказанный нами выше принцип оправдался».

Дальнейшие доказательства Гаусса во «втором методе» заключаются в решении указанной в начале основной задачи математической обработки наблюдений, исходя из принципа наибольшего веса (или, что то же самое, из принципа наименьшей дисперсии). Результат решения получается в виде системы нормальных уравнений относительно искомых неизвестных. К такому же результату приводит метод наименьших квадратов. Этим и доказывается правомерность последнего. В ходе всего доказательства считается, что результаты измерений независимы и не содержат систематических ошибок.

Академик А. А. Марков, критически рассмотрев все направления обоснования метода наименьших квадратов, остановил свой выбор на втором обосновании Гаусса и усовершенствовал его [8]. Марков исходил из тех же концепций, что и Гаусс. Однако в отличие от Гаусса Марков линейные комбинации результатов наблюдений называет приближенными равенствами, достоинство же каждого приближенного равенства оценивается его весом.

В 1938 г. Ф. Дэвидом и Ю. Нейманом была опубликована статья «Обобщение теоремы Маркова о наименьших квадратах» [10], в которой авторы обобщили основную задачу математической обработки наблюдений, поставив в качестве задачи определение наилучших значений не неизвестных, а их линейной функции

$$u = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_k x_k. \tag{2}$$

Определение наилучших значений неизвестных при этом можно представить в виде частного случая такой более общей задачи (когда число функций u равно k и каждая j-я функция имеет вид $u^{(j)} = x_j$). Решение обобщенной основной задачи авторы оформили в виде теоремы, которую назвали обобщенной теоремой Маркова.

Наконец, в 1964 г. Ю. В. Кемниц [4] расширил применение принципа наибольшего веса на зависимые наблюдения, доказав «основную теорему обобщенного метода наименьших квадратов», а в 1972 г. Ю. И. Маркузе [9] распространил действие этого принципа на измерения, имеющие вырожденную корреляционную матрицу. Заметим, что исследования в [9] носят в основном алгебраический характер, а поэтому результаты пригодны для уравнивания при любом обосновании метода наименьших квадратов.

Таким образом, обоснование принципа наибольшего веса в настоящее время состоит из четырех частей: рассуждений Гаусса, непосредственно обосновывающих применение принципа наименьшей дисперсии, обобщенной теоремы Маркова, теоремы Кемница и доказательства Маркузе. Из последних трех частей основное значение имеет обобщенная теорема Маркова. Как уже указывалось, последний вариант этой теоремы изложен в [10] Дэвидом и Нейманом. Приведем новый вариант доказательства теоремы Маркова (без той ее части, которая касается оценки точности), в котором в отличие от предыдущих изложение ведется в матричном исчислении; введено некоторое обобщение, заключающееся в том, что рассматривается задача определения наилучших значений не одной функции, как это сделано в [10], а некоторой совокупности функций u^j $(j=1, 2, \ldots, m)$; измерения считаем зависимыми, что позволило объединить теоремы Маркова и Кемница, т. е. две части обоснования принципа наибольшего веса объединить в одну; использованы некоторые приемы, позволившие сократить доказательство.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, введем некоторые обозначения: M — знак математического ожидания; $D_{\bar{x}}$ — дисперсионная матрица того вектора, обозначение которого дано в виде индекса; G — матрица системы уравнений погрешностей; $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$ — вектор искомых неизвестных в основной задаче математической обработки наблюдений (T — знак транспонирования); $\bar{l}=(l_1, l_2, \ldots, l_n)^T$ — вектор свободных членов в системе уравнений погрешностей; $\bar{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ — вектор поправок в результаты измерений; K — корреляционная матрица результатов измерений, т. е. матрица, недиагональными элементами которой являются коэффициенты корреляции; P — матрица весов результатов измерений; A — матрица системы нормальных уравнений; $\bar{u}=(u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)})^T$ — вектор функций $u^{(j)}$; $\bar{l}_1$ — вектор свободных членов нормальных уравнений.

Обобщенная теорема Маркова—Кемница. Если результаты измерений, вводимые в уравнивание, свободны от систематических ошибок, то наибольшим весом будут обладать значения функций $\bar{u}$ по отдельности для того значения вектора $\bar{x}$, которое удовлетворяет системе нормальных уравнений

$$A\bar{x}+\bar{l}_1=0, \tag{3}$$

где матрица нормальных уравнений A и вектор свободных членов $\bar{l}_1$ описаны равенствами

$$A = G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} G, \quad (4) \qquad \bar{l}_1 = G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть задаче уравнивания соответствует система уравнений погрешностей

$$G\bar{x}+\bar{l}=\bar{v}. \tag{6}$$

Точное соотношение, т. е. соотношение, имеющее место при отсутствии ошибок, имеет вид

$$G\bar{x}+\bar{l}=0. \tag{7}$$

Матрица G имеет n строк и k столбцов, ранг ее равен k, поэтому матрица G имеет бесчисленное множество обратных матриц. Умножим уравнение (7) слева на одну из обратных матриц G^{+} *. Тогда получим

$$\bar{x} = -G^{+}\bar{l}. \tag{8}$$

Пусть система функций $\bar{u}$ связана с вектором $\bar{x}$ уравнением

$$\bar{u} = U\bar{x}, \tag{9}$$

где U — матрица коэффициентов. Учитывая (8), получаем

$$\bar{u} = -UG^{+}\bar{l}, \tag{10}$$

или при использовании обозначения

$$UG^{+} = T \tag{11}$$

появится возможность записать это так:

$$\bar{u} = -T\bar{l}. \tag{12}$$

Согласно [5], дисперсионная матрица вектора $\bar{u}$ выражается через дисперсионную матрицу вектора $\bar{l}$ следующим образом:

$$D_{\bar{u}} = TD_{\bar{l}}\,T^{T}. \tag{13}$$

Так как

$$D_{\bar{l}} = \sigma_0^2 P^{-1/2} K P^{-1/2}, \tag{14}$$

где σ_0^2 — дисперсия единицы веса, то

$$D_{\bar{u}} = \sigma_0^2 T P^{-1/2} K P^{-1/2}\, T^{T}. \tag{15}$$

Принцип наибольшего веса требует минимизации каждого из диагональных элементов матрицы $D_{\bar{u}}$. Считая дисперсию единицы веса неизменной, видим, что необходимо потребовать минимизации каждого из диагональных элементов матрицы $TP^{-1/2} K P^{-1/2}\, T^{T}$ при учете (11).

Составим вспомогательную функцию Лагранжа

$$\Phi = TP^{-1/2} KP^{-1/2}\, T^{T} - (TG - U)\, L, \tag{16}$$

где L — матрица множителей Лагранжа.

Возьмем производные только от диагональных элементов матрицы Ф, что отметим индексом d в обозначении производной.

Поскольку для произвольных матриц A и B имеет место

$$\frac{d\,(AB)_d}{dA} = B,$$

ибо

$$\lim_{\Delta a_{ij} \to 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} [(a_{ij} + \Delta a_{ij})\, b_{ji} - a_{ij}\, b_{ji}]}{\Delta a_{ij}} = b_{ji},$$

* Матрица G^{+} пока не определена.

то в нашем случае получим

$$\frac{d\Phi_d}{dT} = 2P^{-1/2} K P^{-1/2} T^{\tau} - 2GL = 0. \quad (1$$

Отсюда $$T^T = P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} GL,$$

или $$T = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (1$$

Подставим (19) в (11) и используем (4)

$$U = TG = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} G, \quad (2$$

т. е. $$L^T = UA^{-1}. \quad (2$$

Таким образом,

$$T = UA^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (2$$

Поэтому, вспоминая (12), видим, что

$$\bar{u} = - UA^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (2$$

Но в то же время для $\bar{u}$ справедливо (9). Стало быть,

$$\bar{x} = - A^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (2$$

Легко видеть, что такое значение вектора $\bar{x}$ получается из ре шения системы нормальных уравнений (3) с матрицей (4) и век тором свободных членов (5). Теорема доказана.

Все изложенное показывает, что самым слабым методом обосновании принципа наибольшего веса является произвольност принятия этого принципа, на что указывал сам Гаусс. Совершен ствование последующих доказательств в целях обоснования ме тода наименьших квадратов не привело к устранению этого недо статка.

Представляется, что метод наименьших квадратов можно стро го доказать только в том случае, если базироваться на понятии вероятнейшей оценки, которое дано в работах [6, 7].

1. *Багратуни Г. В.* Введение. — В кн.: Гаусс К. Ф. Избранные геоде зические сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1, с. 3—15. 2. *Больша ков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезически измерений. — М.: Недра, 1977. — 368 с. 3. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодези ческие сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1. — 152 с. 4. *Ке ниц Ю. В.* К обоснованию методов (способа) наименьших квадратов. — Т МИИЗ, 1964, вып. 22, с. 67—78. 5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадрато и основы теории обработки наблюдений. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 334 с. 6. *Магуськин Б. Ф.* О вероятнейшей оценке математического ожидания. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1978, вып. 5, с. 41—49. 7. *Магус кин Б. Ф.* Еще раз о вероятнейшей оценке математического ожидания в мно гомерном случае. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1982, вып. с. 38—50. 8. *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. — Спб., 1900. — 400 9. *Маркузе Ю. И.* Уравнение измерений с вырожденной корреляционной матр цей. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, вып. 3, с. 15—2 10. *David F. N., Neyman Ju.* Extention of the Markoff Theorem on Least Squ res. — Statistical Research Memoirs, 1938, № 1, p. 14—18.

Статья поступила в редколлегию 17. 10.