то в нашем случае получим

$$\frac{d\Phi_d}{dT} = 2P^{-1/2} K P^{-1/2} T^{\tau} - 2GL = 0. \quad (17)$$

Отсюда
$$T^T = P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} GL,$$
или
$$T = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (19)$$

Подставим (19) в (11) и используем (4)

$$U = TG = L^T G^T P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} G, \quad (20)$$

т. е.
$$L^T = UA^{-1}. \quad (21)$$

Таким образом,

$$T = UA^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2}. \quad (22)$$

Поэтому, вспоминая (12), видим, что

$$\bar{u} = - UA^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (23)$$

Но в то же время для $\bar{u}$ справедливо (9). Стало быть,

$$\bar{x} = - A^{-1} G^{\tau} P^{1/2} K^{-1} P^{1/2} \bar{l}. \quad (24)$$

Легко видеть, что такое значение вектора $\bar{x}$ получается из ре шения системы нормальных уравнений (3) с матрицей (4) и век тором свободных членов (5). Теорема доказана.

Все изложенное показывает, что самым слабым методом обосновании принципа наибольшего веса является произвольност принятия этого принципа, на что указывал сам Гаусс. Совершен ствование последующих доказательств в целях обоснования ме тода наименьших квадратов не привело к устранению этого недо статка.

Представляется, что метод наименьших квадратов можно стро го доказать только в том случае, если базироваться на понятии вероятнейшей оценки, которое дано в работах [6, 7].

1. *Багратуни Г. В.* Введение. — В кн.: Гаусс К. Ф. Избранные геоде зические сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1, с. 3—15. 2. *Больши ков В. Д., Гайдаев П. А.* Теория математической обработки геодезически измерений. — М.: Недра, 1977. — 368 с. 3. *Гаусс К. Ф.* Избранные геодези ческие сочинения. — М.: Изд-во геод. лит., 1957, т. 1. — 152 с. 4. *Кем ниц Ю. В.* К обоснованию методов (способа) наименьших квадратов. — Тр МИИЗ, 1964, вып. 22, с. 67—78. 5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадрато и основы теории обработки наблюдений. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 334 с. 6. *Магуськин Б. Ф.* О вероятнейшей оценке математического ожидания. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1978, вып. 5, с. 41—49. 7. *Магус кин Б. Ф.* Еще раз о вероятнейшей оценке математического ожидания в мно гомерном случае. — Геодезия и фотограмметрия в горном деле, 1982, вып. 9 с. 38—50. 8. *Марков А. А.* Исчисление вероятностей. — Спб., 1900. — 400 с 9. *Маркузе Ю. И.* Уравнение измерений с вырожденной корреляционной матри цей. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, вып. 3, с. 15—20 10. *David F. N., Neyman Ju.* Extention of the Markoff Theorem on Least Squa res. — Statistical Research Memoirs, 1938, № 1, p. 14—18.

Статья поступила в редколлегию 17. 10.

УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О ТРАКТОВКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Как известно, физическая поверхность Земли близка к сфере и измеренные на ней аномалии силы тяжести с практически достаточной точностью удовлетворяют простейшее граничное условие для возмущающего потенциала, приводящее в случае сферы к хорошо известному интегралу Стокса. Поэтому наиболее простым и эффективным методом решения данной краевой задачи является метод малого параметра, предложенный М. С. Молоденским [6].

Он заключается во введении коэффициента $k (0 \leqslant k \leqslant 1)$ для всех высот $H = \rho - R$ рельефа краевой поверхности s, отсчитываемых от некоторой земной сферы c радиуса R без изменения названных выше аномалий Δg. Так как высóты H по сравнению с радиусом R являются малыми, то коэффициент k можно рассматривать как малый параметр. При этом краевая поверхность s и радиус-вектор $\rho' = R + H + z$ любой внешней точки становятся функциями от k, причем радиальное расстояние z от поверхности s до этой точки остается одинаковым при всех значениях k. Следовательно, функциями от k становятся оператор M_s граничного условия

$$M_s T \equiv - \left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'} \right)_{\rho' \to \rho} = \Delta g \quad (1)$$

для возмущающего потенциала $T = T(\rho', \theta, \lambda)$ и обратный ему оператор M_s^{-1}. Решение задачи (операторного уравнения (1)) $T = M_s^{-1} \Delta g$ находят в виде степенного ряда

$$\bar{T} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n k^n, \quad (2)$$

выражающего при $k = 1$ определяемый потенциал. Таким образом, вопрос заключается в получении формул для первых коэффициентов $T_n = (M_s^{-1})_n \Delta g$ ряда, число которых лимитируется точностью граничного условия (1), составляющей величину приблизительно $(0{,}1 \ldots 0{,}2) \cdot 10^{-5}$ м/с^2.

Последовательные приближения возмущающего потенциала T по степеням параметра k получены с помощью интегральных уравнений [1, 2, 6], а также с помощью формального аналитического продолжения аномалий (1) на отсчетную сферу, расположенную внутри поверхности s [3, 4 7], что соответствует основной идее метода малого параметра, т. е. использованию решения задачи для более простой поверхности, принимаемой за отсчетную. Тождественность решений, найденных этими двумя различными путями [10], подтверждает математическую законность выводов ряда (2) Молоденского и способствует преодолению трудностей применения формул строгой теории Молоденского на практике [5]. Однако из-за недопустимости аналитического продолжения в общем случае названный результат сложен для интерпретации.

В [7] указывается на возможность интуитивного объяснения этого важного момента на основании теоремы Рунге о существовании другого потенциала T', аналитически продолжаемого на отсчетную сферу, расположенную внутри s, и хорошо аппроксимирующего искомый потенциал T.

Попытаемся несколько подробнее показать согласованность вывода ряда Молоденского, представляя потенциал T в виде интеграла Стокса [4, 7] с общей математической основой решения данной краевой задачи. Она выражается в том, что интегральный оператор M_s^{-1}, аналогичный по смыслу интегральному оператору Стокса M_c^{-1}, определяется лишь геометрией поверхности s [9].

Действительно, потенциалы, принадлежащие области S определения операторов M_s и M_s^{-1}, могут аналитически продолжаться и не продолжаться, и решение $M_s^{-1}\Delta g$ не зависит от предположения аналитического продолжения. Это предположение отражает независимость определения оператора M_s^{-1} от выбора вспомогательной сферы c и в общем случае не может приводить к решению $T=M_c^{-1}\,\Delta g_c$, т. е. к вычислению потенциала области C.

Поэтому данный оператор допускает трактовку объединения операций преобразований от Δg к аномалиям Δg_c на сфере произвольного радиуса и от них к потенциалу T, основанных на разрешимости внешней задачи Дирихле для поверхности s и интеграле Стокса. Следовательно, доказательство разрешимости задачи, а также ее решение методом малого параметра, выполненные с использованием вспомогательной или отсчетной сферы как внешней ($R=\rho_{\max}$), можно считать осуществленными с помощью сферы внутренней ($R=\rho_{\min}$).

Что касается смысла используемого параметра, при всех значениях которого ($0\leqslant k\leqslant 1$) аномалии Δg остаются без изменений, то он выражает замену в $M_{sk}T=\Delta g_k$ и $T=M_{sk}^{-1}\Delta g_k$ аномалий Δg_k на поверхностях $s_k\equiv\bar{s}$ их значениями при $k=1$, восстанавливающими область S определения последовательностей приближений операторов.

Таким образом, при выводе ряда (2), который является разложением функции $\bar{T}\equiv T_k=M_{sk}^{-1}\Delta g$ $(M_{sk}\,T_k|_{k\to 1}=\Delta g)$, можно предполагать аналитическое продолжение аномалий на внутреннюю сферу c и исходить из интеграла Стокса, записанного в виде

$$T=\frac{R^2}{4\pi}\int D\Delta g s(\rho',\psi)d\omega, \tag{3}$$

где $D\Delta g=\Delta g_c$; $\rho'=R+\bar{H}+z$; $\bar{H}$ — высота H, соответствующая данной точке. При введении параметра k функциями от него ста-

новятся операторы D и $s(\rho',\psi)$. Они раскладываются в степенные ряды

$$\bar{D}\Delta g=\sum_{p=0}^{\infty} D_p\,\Delta g k^p, \tag{4}$$

$$s(\bar{\rho}',\psi)=\sum_{q=0}^{\infty} s_q'\,k^q \tag{5}$$

и могут рассматриваться в окрестности точки $k=0$. В этом проявляется допустимость данного предположения или использования в (3) внешней отсчетной сферы c.

В результате умножения рядов (4) и (5) интеграл (3) преобразовывается в ряд (2) Молоденского, объединяющий указанные операции по степеням параметра k. Принимая во внимание формулы для коэффициентов $D_p\Delta g=(\Delta g_c)_p$ [4, 7] и коэффициентов s_q [4], получаем решение задачи в виде

$$M_s^{-1}\,\Delta g=\sum_{n=0}^{\infty}(M_s^{-1})_n\,\Delta g, \tag{6}$$

где

$$(M_s^{-1})_n\,\Delta g=\frac{R^2}{4\pi}\int\sum_{l=0}^{n} D_{n-l}\,\Delta g s_l\,d\omega.$$

Использование формального аналитического продолжения $D\Delta g=\Delta g_c$ можно объяснить следующим образом. Вывод ряда (4), выполняемый при предположении допустимости аналитического продолжения аномалий на отсчетную сферу c, и его подстановка в формулу (3), дают результат приведения решения задачи, найденного в области S к решению задачи, полученному в области C. Однако при этом же предположении возможен и обратный переход, а именно, от решения в области C к решению в области S, в результате которого снимается принятое предположение. Этот переход осуществляется путем выделения высоты $\bar{H}$ в радиусе-векторе ρ' исследуемой точки и введения в него параметра k, а также разложения ядра интеграла (3) в ряд (5) и умножения степенных рядов относительно малого параметра k (4) и (5).

Разумеется, что отсчетная сфера не обязательно должна быть внутренней. Она может пересекаться с поверхностью s и проходить через исследуемую точку, принадлежащую этой поверхности ($z=0$). В этом случае $\bar{H}=0$, формула (6) упрощается и приводится к формуле вида (3), в которой радиус R становится равным радиусу-вектору поверхности s в данной точке, а радиус-вектор исследуемой точки внешнего пространства равен $R+z$. Таким образом, значения аномалий (4), не являющихся аналитическим продолжением, определяют потенциал лишь в точках, для которых $\bar{H}=0$ и $\rho'=R+z$. Используемая при этом формула не представляет собой решения задачи для сферы. Интегральное преобразование (3) аномалий на сферах радиусов, равных $R+\bar{H}$ [7, 8], выражает плоскую аппроксимацию решения (6), рассматриваемую в [7] при $z=0$. Следовательно, и в данном случае используется предположение аналитического продолжения, вполне согласующееся с определением решения $M_s^{-1}\Delta g$, т. е. без изменения области S.

Формулы для вычислений членов рядов (6) и (2), определяющих возмущающий потенциал T вне Земли, при $n=0,1$ имеют вид [2, 4]:

$$T_0 \equiv (M_s^{-1})_0\, \Delta g = \frac{R^2}{4\pi} \int \Delta g s\,(\rho_0', \psi)\, d\omega, \tag{7}$$

$$T_1 \equiv (M_s^{-1})_1\, \Delta g = -\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \left(H - \frac{R}{\rho_0'}\tilde{H}\right) s\,(\rho_0', \psi)\, d\omega + T_0 \frac{H}{\rho_0'},$$

где R — средний радиус Земли; $\rho_0'=R+z$;

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int (\Delta g - \Delta \bar{g})\, \frac{d\omega}{r_1^3} - \frac{2\Delta g}{R};$$

$\Delta \tilde{g}$ — значение аномалии Δg в данной точке; $r_1=2\sin\dfrac{\psi}{2}$.

Остановимся еще на вопросе о сферической функции первого порядка в аномалиях Δg, возникающем при решении задачи методом малого параметра с помощью интегральных уравнений. Так, интегральное уравнение для нулевого приближения χ_0 вспомогательной плотности χ простого слоя имеет вид [6]

$$2\pi\chi_0 - \frac{3}{2} R \int \frac{\chi_0}{r_0}\, d\omega = \Delta g, \tag{8}$$

где $r_0=2R\sin\dfrac{\psi}{2}$.

При решении этого уравнения возникает требование отсутствия сферической функции первого порядка в Δg, вызываемой отклонениями поверхности s от сферы. Это допустимо, так как при $k=0$ аномалии Δg можно рассматривать как значение аномалий Δg_c. Таким образом можно записать решение

$$\chi_0 = \frac{\Delta g}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int \Delta g s\,(\psi)\, d\omega, \tag{9}$$

аналогичное решению для сферы. Однако его подстановка в выражение для нулевого приближения потенциала ($k=0$) [2]:

$$T_0 = R^2 \int \frac{\chi_0}{r_0'}\, d\omega,$$

где $r_0'=\sqrt{R^2+\rho_0'^2-2R\rho_0'\cos\psi}$, приводит не к определению потенциала обобщенной формулой Стокса области C, а к определению

этого приближения области S, т. е. к формуле (7). При $z=0$ получаем нулевое приближение потенциала на поверхности s (6):

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \int \Delta g s\,(\psi)\, dw. \tag{10}$$

Можно рассуждать и таким образом. Принимая во внимание, что при $k=0$ метод функций Грина [9] приводит к формулам (7) и (10), имеем

$$\int \frac{\chi_0}{r_0}\, d\omega = \frac{1}{4\pi R} \int \Delta g s\,(\psi)\, d\omega.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (8), преобразовываем это уравнение в формулу (9), не прибегая к его решению.

Данный результат подтверждает допустимость формального предположения отсутствия сферической функции первого порядка в аномалиях Δg или аналитического продолжения аномалий на отсчетную сферу.

Итак, рассмотренный метод малого параметра решения краевой задачи теории фигуры Земли, так же, как и начальное (нулевое) приближение возмущающего потенциала (7), допускает трактовку аналитического продолжения и восстановления области определения решения. Последовательные приближения потенциала, полученные с помощью интегральных уравнений для плотностей слоя и для функции Грина [9], а также с помощью интеграла Стокса, представляют собой различные интегральные выражения ряда Молоденского (2) и должны быть идентичны.

1. *Бровар В. В.* О решении краевой задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, вып. 4, с. 129—137. 2. *Марыч М. И.* О методе Молоденского решения его краевой задачи. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 38, с. 67—73. 3. *Марыч М. И.* О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 10, с. 17—27. 4. *Марыч М. И.* Об определении внешнего гравитационного поля Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 36, с. 68—74. 5. *Марыч М. И.* Вычисление потенциала топографических масс в приближениях Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 6, с. 66—73. 6. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131, с. 1—251. 7. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. — М.: Недра, 1983. — 392 с. 8. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. — 200 с. 9. *Остач О. М.* Определение возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли методом функций Грина. — Тр. ЦНИИГАиК, 1969, вып. 176, с. 26—42. 10. *Пеллинен Л. П.* О тождественности различных решений задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1974, вып. 3, с. 65—71.

Статья поступила в редколлегию 26. 12. 84