УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О ТРАКТОВКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Как известно, физическая поверхность Земли близка к сфере и измеренные на ней аномалии силы тяжести с практически достаточной точностью удовлетворяют простейшее граничное условие для возмущающего потенциала, приводящее в случае сферы к хорошо известному интегралу Стокса. Поэтому наиболее простым и эффективным методом решения данной краевой задачи является метод малого параметра, предложенный М. С. Молоденским [6].

Он заключается во введении коэффициента $k (0 \leqslant k \leqslant 1)$ для всех высот $H = \rho - R$ рельефа краевой поверхности s, отсчитываемых от некоторой земной сферы c радиуса R без изменения названных выше аномалий Δg. Так как высо́ты H по сравнению с радиусом R являются малыми, то коэффициент k можно рассматривать как малый параметр. При этом краевая поверхность s и радиус-вектор $\rho' = R + H + z$ любой внешней точки становятся функциями от k, причем радиальное расстояние z от поверхности s до этой точки остается одинаковым при всех значениях k. Следовательно, функциями от k становятся оператор M_s граничного условия

$$M_s T \equiv -\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho} = \Delta g \tag{1}$$

для возмущающего потенциала $T = T(\rho', \theta, \lambda)$ и обратный ему оператор M_s^{-1}. Решение задачи (операторного уравнения (1)) $T = M_s^{-1} \Delta g$ находят в виде степенного ряда

$$\overline{T} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n k^n, \tag{2}$$

выражающего при $k = 1$ определяемый потенциал. Таким образом, вопрос заключается в получении формул для первых коэффициентов $T_n = (M_s^{-1})_n \Delta g$ ряда, число которых лимитируется точностью граничного условия (1), составляющей величину приблизительно $(0{,}1 \ldots 0{,}2) \cdot 10^{-5}$ м/с².

Последовательные приближения возмущающего потенциала T по степеням параметра k получены с помощью интегральных уравнений [1, 2, 6], а также с помощью формального аналитического продолжения аномалий (1) на отсчетную сферу, расположенную внутри поверхности s [3, 4 7], что соответствует основной идее метода малого параметра, т. е. использованию решения задачи для более простой поверхности, принимаемой за отсчетную. Тождественность решений, найденных этими двумя различными путями [10], подтверждает математическую законность выводов ряда (2) Молоденского и способствует преодолению трудностей применения формул строгой теории Молоденского на практике [5]. Однако из-за недопустимости аналитического продолжения в общем случае названный результат сложен для интерпретации.

В [7] указывается на возможность интуитивного объяснения этого важного момента на основании теоремы Рунге о существовании другого потенциала T', аналитически продолжаемого на отсчетную сферу, расположенную внутри s, и хорошо аппроксимирующего искомый потенциал T.

Попытаемся несколько подробнее показать согласованность вывода ряда Молоденского, представляя потенциал T в виде интеграла Стокса [4, 7] с общей математической основой решения данной краевой задачи. Она выражается в том, что интегральный оператор M_s^{-1}, аналогичный по смыслу интегральному оператору Стокса M_c^{-1}, определяется лишь геометрией поверхности s [9].

Действительно, потенциалы, принадлежащие области S определения операторов M_s и M_s^{-1}, могут аналитически продолжаться и не продолжаться, и решение $M_s^{-1}\Delta g$ не зависит от предположения аналитического продолжения. Это предположение отражает независимость определения оператора M_s^{-1} от выбора вспомогательной сферы c и в общем случае не может приводить к решению $T=M_c^{-1}\Delta g_c$, т. е. к вычислению потенциала области C.

Поэтому данный оператор допускает трактовку объединения операций преобразований от Δg к аномалиям Δg_c на сфере произвольного радиуса и от них к потенциалу T, основанных на разрешимости внешней задачи Дирихле для поверхности s и интеграле Стокса. Следовательно, доказательство разрешимости задачи, а также ее решение методом малого параметра, выполненные с использованием вспомогательной или отсчетной сферы как внешней ($R=\rho_{\max}$), можно считать осуществленными с помощью сферы внутренней ($R=\rho_{\min}$).

Что касается смысла используемого параметра, при всех значениях которого ($0\leqslant k\leqslant 1$) аномалии Δg остаются без изменений, то он выражает замену в $M_{sk}T=\Delta g_k$ и $T=M_{sk}^{-1}\Delta g_k$ аномалий Δg_k на поверхностях $s_k\equiv\bar{s}$ их значениями при $k=1$, восстанавливающими область S определения последовательностей приближений операторов.

Таким образом, при выводе ряда (2), который является разложением функции $\bar{T}\equiv T_k=M_{sk}^{-1}\Delta g$ $(M_{sk}\, T_k|_{k\to 1}=\Delta g)$, можно предполагать аналитическое продолжение аномалий на внутреннюю сферу c и исходить из интеграла Стокса, записанного в виде

$$T=\frac{R^2}{4\pi}\int D\Delta g s(\rho',\psi)d\omega, \tag{3}$$

где $D\Delta g=\Delta g_c$; $\rho'=R+\bar{H}+z$; $\bar{H}$ — высота H, соответствующая данной точке. При введении параметра k функциями от него становятся операторы D и $s(\rho', \psi)$. Они раскладываются в степенные ряды

$$\overline{D}\Delta g = \sum_{p=0}^{\infty} D_p \Delta g k^p, \tag{4}$$

$$s(\overline{\rho'}, \psi) = \sum_{q=0}^{\infty} s'_q k^q \tag{5}$$

и могут рассматриваться в окрестности точки $k=0$. В этом проявляется допустимость данного предположения или использования в (3) внешней отсчетной сферы c.

В результате умножения рядов (4) и (5) интеграл (3) преобразовывается в ряд (2) Молоденского, объединяющий указанные операции по степеням параметра k. Принимая во внимание формулы для коэффициентов $D_p\Delta g = (\Delta g_c)_p$ [4, 7] и коэффициентов s_q [4], получаем решение задачи в виде

$$M_s^{-1}\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} (M_s^{-1})_n \Delta g, \tag{6}$$

где
$$(M_s^{-1})_n \Delta g = \frac{R^2}{4\pi} \int \sum_{l=0}^{n} D_{n-l} \Delta g s_l \, d\omega.$$

Использование формального аналитического продолжения $D\Delta g = \Delta g_c$ можно объяснить следующим образом. Вывод ряда (4), выполняемый при предположении допустимости аналитического продолжения аномалий на отсчетную сферу c, и его подстановка в формулу (3), дают результат приведения решения задачи, найденного в области S к решению задачи, полученному в области C. Однако при этом же предположении возможен и обратный переход, а именно, от решения в области C к решению в области S, в результате которого снимается принятое предположение. Этот переход осуществляется путем выделения высоты $\bar{H}$ в радиусе-векторе ρ' исследуемой точки и введения в него параметра k, а также разложения ядра интеграла (3) в ряд (5) и умножения степенных рядов относительно малого параметра k (4) и (5).

Разумеется, что отсчетная сфера не обязательно должна быть внутренней. Она может пересекаться с поверхностью s и проходить через исследуемую точку, принадлежащую этой поверхности ($z=0$). В этом случае $\bar{H}=0$, формула (6) упрощается и приводится к формуле вида (3), в которой радиус R становится равным радиусу-вектору поверхности s в данной точке, а радиус-вектор исследуемой точки внешнего пространства равен $R+z$. Таким образом, значения аномалий (4), не являющихся аналитическим продолжением, определяют потенциал лишь в точках, для которых $\bar{H}=0$ и $\rho'=R+z$. Используемая при этом формула не представляет собой решения задачи для сферы. Интегральное преобразование (3) аномалий на сферах радиусов, равных $R+\bar{H}$ [7, 8], выражает плоскую аппроксимацию решения (6), рассматриваемую в [7] при $z=0$. Следовательно, и в данном случае используется предположение аналитического продолжения, вполне согласующееся с определением решения $M_s^{-1}\Delta g$, т. е. без изменения области S.

Формулы для вычислений членов рядов (6) и (2), определяющих возмущающий потенциал T вне Земли, при $n=0,1$ имеют вид [2, 4]:

$$T_0 \equiv (M_s^{-1})_0 \Delta g = \frac{R^2}{4\pi} \int \Delta g s(\rho_0', \psi)\, d\omega, \tag{7}$$

$$T_1 \equiv (M_s^{-1})_1 \Delta g = -\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 \left(H - \frac{R}{\rho_0'}\tilde{H}\right) s(\rho_0', \psi)\, d\omega + T_0 \frac{H}{\rho_0'},$$

где R — средний радиус Земли; $\rho_0'=R+z$;

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int (\Delta g - \Delta \tilde{g}) \frac{d\omega}{r_1^3} - \frac{2\Delta g}{R};$$

$\Delta\tilde{g}$ — значение аномалии Δg в данной точке; $r_1=2\sin\frac{\psi}{2}$.

Остановимся еще на вопросе о сферической функции первого порядка в аномалиях Δg, возникающем при решении задачи методом малого параметра с помощью интегральных уравнений. Так, интегральное уравнение для нулевого приближения χ_0 вспомогательной плотности χ простого слоя имеет вид [6]

$$2\pi\chi_0 - \frac{3}{2} R \int \frac{\chi_0}{r_0}\, d\omega = \Delta g, \tag{8}$$

где $r_0=2R\sin\frac{\psi}{2}$.

При решении этого уравнения возникает требование отсутствия сферической функции первого порядка в Δg, вызываемой отклонениями поверхности s от сферы. Это допустимо, так как при $k=0$ аномалии Δg можно рассматривать как значение аномалий Δg_c. Таким образом можно записать решение

$$\chi_0 = \frac{\Delta g}{2\pi} + \frac{3}{(4\pi)^2} \int \Delta g s(\psi)\, d\omega, \tag{9}$$

аналогичное решению для сферы. Однако его подстановка в выражение для нулевого приближения потенциала ($k=0$) [2]:

$$T_0 = R^2 \int \frac{\chi_0}{r_0'}\, d\omega,$$

где $r_0'=\sqrt{R^2+\rho_0'^2-2R\rho_0'\cos\psi}$, приводит не к определению потенциала обобщенной формулой Стокса области C, а к определению этого приближения области S, т. е. к формуле (7). При $z=0$ получаем нулевое приближение потенциала на поверхности s (6):

$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \int \Delta g s(\psi)\, dw. \tag{10}$$

Можно рассуждать и таким образом. Принимая во внимание, что при $k=0$ метод функций Грина [9] приводит к формулам (7) и (10), имеем

$$\int \frac{\chi_0}{r_0}\, d\omega = \frac{1}{4\pi R} \int \Delta g s(\psi)\, d\omega.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (8), преобразовываем это уравнение в формулу (9), не прибегая к его решению.

Данный результат подтверждает допустимость формального предположения отсутствия сферической функции первого порядка в аномалиях Δg или аналитического продолжения аномалий на отсчетную сферу.

Итак, рассмотренный метод малого параметра решения краевой задачи теории фигуры Земли, так же, как и начальное (нулевое) приближение возмущающего потенциала (7), допускает трактовку аналитического продолжения и восстановления области определения решения. Последовательные приближения потенциала, полученные с помощью интегральных уравнений для плотностей слоя и для функции Грина [9], а также с помощью интеграла Стокса, представляют собой различные интегральные выражения ряда Молоденского (2) и должны быть идентичны.

1. *Бровар В. В.* О решении краевой задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1963, вып. 4, с. 129—137. 2. *Марыч М. И.* О методе Молоденского решения его краевой задачи. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 38, с. 67—73. 3. *Марыч М. И.* О втором приближении М. С. Молоденского для возмущающего потенциала. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1969, вып. 10, с. 17—27. 4. *Марыч М. И.* Об определении внешнего гравитационного поля Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 36, с. 68—74. 5. *Марыч М. И.* Вычисление потенциала топографических масс в приближениях Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979, вып. 6, с. 66—73. 6. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131, с. 1—251. 7. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. — М.: Недра, 1983. — 392 с. 8. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. — 200 с. 9. *Остач О. М.* Определение возмущающего потенциала и стоксовых постоянных Земли методом функций Грина. — Тр. ЦНИИГАиК, 1969, вып. 176, с. 26—42. 10. *Пеллинен Л. П.* О тождественности различных решений задачи Молоденского. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1974, вып. 3, с. 65—71.

Статья поступила в редколлегию 26. 12. 84