УДК 528.11

И. Ф. МОНИН

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН И ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ МАТРИЦ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Раньше геодезические сети чаще уравнивали коррелатным или параметрическим методами. С появлением ЭВМ стал применяться преимущественно параметрический метод как наиболее удобный для программирования. В последнее время начали применяться модифицированные методы параметрического уравнивания [1, 3—7], в основу которых положены уравнения поправок параметрического метода. Так, выполняя линейные преобразования над классическими уравнениями поправок, можно получить условные уравнения, или уравнения поправок, в которых параметрами являются поправки в необходимые измерения. Эти методы в некоторых случаях более эффективны для применения ЭВМ.

Рассмотрим оценку точности в различных методах уравнивания геодезических сетей, полагая, что измеряемые величины не содержат систематических ошибок, распределены нормально и коррелированы, причем корреляционные матрицы измерений (прямая и обратная) известны:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{12} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{1n} & Q_{2n} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{tt} & \vdots & Q_{rt} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{tr} & \vdots & Q_{rr} \end{pmatrix}; \qquad (1)$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} P_{tt} & \vdots & P_{rt} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{tr} & \vdots & P_{rr} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где n, t, r — числа всех, необходимых и избыточных измерений.

1. **Коррелатный метод уравнивания.** В этом методе оценку точности выполняют по формуле

$$1/P_F = f^{\tau}\{Q - QA^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}AQ\}f, \qquad (3)$$

где $f^{\tau} = \left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\ \frac{\partial F}{\partial l_2} \cdots \cdots \frac{\partial F}{\partial l_n}\right)$ — матрица-строка коэффициентов весовой функции dF уравненных элементов геодезической сети; P_F — вес функции уравненных величин, A — матрица коэффициентов условных уравнений; Q — корреляционная матрица измерений. Вывод формулы (3) довольно прост [4]. Пусть L' — вектор истинных значений измеряемых величин, L_0 — вектор уравненных значений, l — вектор измеренных величин. Истинную ошибку функции определяем по формуле

$$\Delta_F = F(L') - F(L_0) = f^{\tau}(\Delta - V), \qquad (4)$$

где Δ — матрица-столбец истинных ошибок измерений; V — матрица-столбец поправок в измеренные значения, причем

$$V = -QA^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}W, \qquad (5)$$

где W — матрица-столбец свободных членов условного уравнения;

$$AV + W = 0; \qquad (6)$$

A — прямоугольная матрица коэффициентов.

Выразим W через истинные ошибки измерений. Для этого в точные условные уравнения подставим $l+\Delta$ и разложим функции в ряд. После преобразований получим

$$A\cdot\Delta + W = 0, \quad W = -A\cdot\Delta. \qquad (7)$$

Теперь на основании (7) и (5) из (4) имеем

$$\Delta_F = f^{\tau}\{E - QA^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}A\}\cdot\Delta, \qquad (8)$$

где E — единичная матрица; τ — знак транспонирования матриц.

Возведя (8) в квадрат и принимая во внимание алгоритм Гаусса

$$m_F^2 = \sigma^2/P_F = \Delta_F\cdot\Delta_F^{\tau}, \qquad (9)$$

находим

$$\Delta_F\cdot\Delta_F^{\tau} = f^{\tau}\{E - QA^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}A\}\,\Delta\cdot\Delta^{\tau}\{E - A^{\tau}(AQA^{\tau})^{-1}AQ\}f. \qquad (10)$$

Так как

$$\Delta\cdot\Delta^{\tau} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}\cdot(\Delta_1\,\Delta_2 \cdots \Delta_n) = \begin{pmatrix} \Delta_1\Delta_1; & \Delta_1\Delta_2 & \cdots & \Delta_1\Delta_n \\ \Delta_2\Delta_1; & \Delta_2\Delta_2 & \cdots & \Delta_2\Delta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_n\Delta_1; & \Delta_n\Delta_2 & \cdots & \Delta_n\Delta_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

и полагая, что

$$\Delta_i = \frac{\sigma}{\sqrt{P_i}}, \quad \Delta_j = \frac{\sigma}{\sqrt{P_j}}, \quad \Delta_i\Delta_j = k_{ij}\frac{\sigma^2}{\sqrt{P_iP_j}}, \quad \Delta_i\Delta_i = \frac{\sigma^2}{P_i}, \qquad (12)$$

где σ — ошибка единицы веса; k_{ij} — коэффициент корреляции; P_i — вес измерения l_i, видим, что (11) представляет собой корреляционную матрицу измерений $\sigma^2 Q$.

Следовательно, из (9), (10) и (11) после преобразований получаем формулу (3).

2. **Модифицированный параметрический метод** [3]. Составим классические уравнения поправок для необходимых и избыточных измерений в геодезической сети:

$$B_t X = V_t; \ (13) \qquad B_r X + L_r = V_r. \qquad (14)$$

Исключив поправки в координаты X, получаем условное уравнение

$$B_r B_t^{-1} V_r - V_r + L_r = (S, -E)\begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_r \end{pmatrix} = 0, \qquad (15)$$

решение которого на основе обобщенного метода наименьших квадратов приводит к результату

$$\begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} Q_{tt} & Q_{rt} \\ Q_{tr} & Q_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\text{т}} \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} L_r, \tag{16}$$

$$R = Q_{rr} - Q_{tr} S^{\text{т}} - SQ_{rr} + SQ_{tt} S^{\text{т}}; \; S = B_r B_t^{-1}.$$

Подставляя в (3) вместо A выражение $A = (S, -E)$, получаем обратный вес функции F уравненных коррелированных измерений в модифицированном параметрическом методе

$$\frac{1}{P_r} = f^{\text{т}} \left\{ Q - Q \begin{pmatrix} S^{\text{т}} \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} (S, -E)\, Q \right\} f. \tag{17}$$

В случае определения веса уравненных координат определяемых пунктов (17) принимает вид

$$\frac{1}{P_x} = f_x^{\text{т}} B_t^{-1} \left\{ Q_{tt} - (Q_{tt} Q_{rt}) \begin{pmatrix} S^{\text{т}} \\ \cdots \\ -E \end{pmatrix} R^{-1} (S, -E) \begin{pmatrix} Q_{tt} \\ \cdots \\ Q_{tr} \end{pmatrix} \right\} B_t^{-\text{т}} f_x, \tag{18}$$

где

$$f_x^{\text{т}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdots\cdots \right).$$

Обоснование (18) следует из замены

$$f^{\text{т}} = (f_t^{\text{т}}, 0_r^{\text{т}}), \; f = \begin{pmatrix} f_t \\ 0_r \end{pmatrix}, \; \frac{\partial F}{\partial l_t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_t} = f_x^{\text{т}} B_t^{-1}$$

и простых преобразований с блочными матрицами. Здесь 0_r — нулевой вектор порядка r.

3. **Параметрический метод уравнивания.** Исходя из (4) и выполняя точно такие же преобразования, как ранее, легко получить

$$\frac{1}{P_F} = f^{\text{т}} B (B^{\text{т}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\text{т}} f, \tag{19}$$

где B — прямоугольная матрица уравнений поправок;

$$BX + L = V, \tag{20}$$

X — вектор поправок в координаты определяемых пунктов; L — матрица-столбец свободных членов; V — матрица-столбец поправок в измеренные величины.

4. **Модифицированный параметрический метод с измеряемыми параметрами** [5]. Записав (20) в блочном виде

$$\begin{pmatrix} B_t \\ B_r \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ L_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix} \tag{21}$$

и выполнив простое линейное преобразование, нетрудно получить уравнение поправок параметрического метода с измеряемыми параметрами

$$\begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} V_t + \begin{pmatrix} 0 \\ L_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_t \\ V_r \end{pmatrix}, \tag{22}$$

а решая (22) на основе обобщенного метода наименьших квадратов, приходим к результату:

$$V_t = -R_1^{-1} (P_{rt} + S^{\text{т}} P_{rr}) L_r, \; (23) \qquad V_r = SV_t + L_r, \tag{24}$$

где

$$R_1 = P_{tt} + P_{rt} S + S^{\text{т}} P_{tr} + S^{\text{т}} P_{rr} S,$$

а индексы t и r означают, что соответствующие им величины относятся к необходимым и избыточным измерениям.

Подставив в (19) вместо B выражение $B = \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}$, получим вес функции F уравненных коррелированных измерений в параметрическом методе с измеряемыми параметрами

$$\frac{1}{P_F} = f^{\text{т}} \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} R_1^{-1} (E_1, S^{\text{т}}) f. \tag{25}$$

Если вычислять вес уравненных координат определяемых пунктов, то (25) упрощается

$$\frac{1}{P_x} = f_x^{\text{т}} B_t^{-1} R_1^{-1} B_t^{-\text{т}} f_x. \tag{26}$$

5. **Обработка измерений одной и той же величины.** В этом случае наилучшее значение вычисляется по [2]

$$L_0 = (S^{\text{т}} Q^{-1} S)^{-1} S^{\text{т}} Q^{-1} l, \tag{27}$$

а обратный вес

$$\frac{1}{P_{L_0}} = (S^{\text{т}} Q^{-1} S)^{-1}, \tag{28}$$

где $S^{\text{т}} = (111 \ldots 11)$, $l^{\text{т}} = (l_1 l_2 \ldots l_n)$.

Ошибка единицы веса в коррелатном и параметрическом методах уравнивания вычисляется по формулам

$$\sigma^2 = \frac{V^{\text{т}} Q^{-1} V}{r} = \frac{1}{r} W^{\text{т}} (AQA^{\text{т}})^{-1} W, \tag{29}$$

$$\sigma^2 = \frac{V^{\text{т}} Q^{-1} V}{r} = \frac{1}{r} L^{\text{т}} \{ Q^{-1} - Q^{-1} B (B^{\text{т}} Q^{-1} B)^{-1} B^{\text{т}} Q^{-1} \} L. \tag{30}$$

Из (29) легко получить формулу Ферреро и ее обобщение на коррелированные измерения.

6. **Обусловленность матриц нормальных уравнений.** Система линейных уравнений считается хорошо обусловленной, если небольшие изменения в ее коэффициентах и свободных членах мало

влияют на результаты решения. Убедительным признаком плохой обусловленности системы нормальных уравнений является чувствительность элементов обратной матрицы к небольшим изменениям элементов исходной матрицы. В теории решения систем линейных уравнений есть много критериев, характеризующих обусловленность систем. Больше всего получили применение числа А. М. Тюринга (1948) и И. Тодда (1950).

Пусть матрица нормальных уравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{1n} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Английский математик А. М. Тюринг для чисел обусловленности использует понятия нормы матрицы и максимума модулей ее элементов

$$M = nM(A)\,M(A^{-1}); \quad (31) \qquad N = \frac{1}{n} N(A)\,N(A^{-1}), \qquad (32)$$

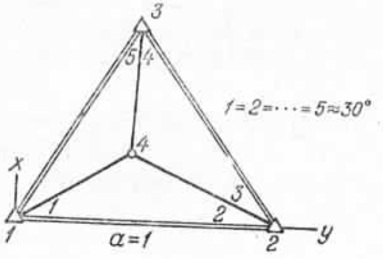
где

$$M(A) = \max|a_{ij}|, \quad N(A) = \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Его соотечественник И. Тодд предложил число обусловленности P

$$P = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}, \qquad (33)$$

где $|\lambda_n|$, $|\lambda_1|$ — максимальное и минимальное по модулю собственные числа матрицы A, n — порядок матрицы.



Сеть триангуляции.

Полагают, что чем меньше числа M, N или P, тем лучше обусловлена система линейных уравнений.

Приведем пример оценки точности сети триангуляции, изображенной на рисунке. Пусть в сети с одинаковой точностью измеряются направления. Будем уравнивать сеть по углам. Смежные углы на пунктах *2* и *3* будут коррелированы, так как они имеют общие направления. Легко установить теоретически, что коэффициент корреляции при этом равен —0,5, а корреляционные матрицы (прямая и обратная) имеют вид

$$\left\{\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 1 \end{array}\right\} = Q, \qquad \left\{\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right\} = Q^{-1}.$$

Ниже приведены результаты вычислений с учетом и без учета корреляционной матрицы четырьмя методами уравнивания. Составлены матрицы условных уравнений, уравнений поправок, нормальных уравнений. Подсчитаны веса для угла *3* и ординаты x_4, а также числа Тюринга.

Коррелатный метод

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad AQA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AQA^{\mathrm{T}})^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$f_3^{\mathrm{T}} = (00100), \quad f_{x_4}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}(11000), \quad \frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \quad \frac{1}{P_{x_4}} = \frac{23}{120}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = AA^{\mathrm{T}}, \quad (AA^{\mathrm{T}})^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$M = 9{,}90; \; N = 1{,}91, \quad \frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{P_{x_4}'} = \frac{11}{72}. \quad M' = 5{,}63; \; N' = 1{,}76.$$

Параметрический метод

$$B = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{cc} 3 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \\ -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{array}\right\}, \quad B^{\mathrm{T}}Q^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 21 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 23 \end{pmatrix}.$$

$$(B^{\tau}Q^{-1}B)^{-1} = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 23 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}.$$

$$B^{\tau}B = \begin{pmatrix} 9 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}, \quad (B^{\tau}B)^{-1} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 11 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \ \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \ M = 2{,}20; \ N = 1{,}02.$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \ \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \ M' = 3{,}36; \ N' = 1{,}44.$$

Модифицированный параметрический метод

$$B_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B_r = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$B_t^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -5 \\ -1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ -1 & 11 & 9 \\ 1 & 9 & 11 \end{pmatrix},$$

$$f^{\tau}_{x_1} = (10), \ \frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \ \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \ M = 9{,}9; \ N = 4{,}37.$$

$$R' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (R^{-1})' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 15 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \ \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \ M' = 16{,}88; \ N' = 4{,}04.$$

Модифицированный параметрический метод
с измеряемыми параметрами

$$R_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \ R_1^{-1} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7/4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3} = \frac{21}{40}, \ \frac{1}{P_{x_1}} = \frac{23}{120}. \ M = 3{,}20; \ N = 1{,}80.$$

$$R_1' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \ (R_1^{-1})' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{P_3'} = \frac{3}{8}, \ \frac{1}{P'_{x_1}} = \frac{11}{72}. \ M' = 4; \ N' = 2{,}07.$$

Ошибка единицы веса

$$\sigma^2 = \frac{1}{30}W^{\tau}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}W, \quad \sigma'^2 = \frac{1}{24}W^{\tau}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}W.$$

Как и должно быть, параметрический метод уравнивания оказался для обработки данной сети наиболее эффективным (числа Тюринга получились наименьшими). Заметим, что R', $(R^{-1})'$, R_1', $(R_1^{-1})'$ обозначают матрицы нормальных уравнений (прямую и обратную) в модифицированных параметрических методах уравнивания, составленные без учета корреляционных связей.

Список литературы: 1. *Герасименко М. Д.* Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. ЦНИИГАиК, 1975, вып. 34, с. 65—73. 2. *Кемниц Ю. В.* Математическая обработка зависимых результатов измерений. — М.: Недра, 1970. — 188 с. 3. *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35, с. 75—84. 4. *Монин И. И.* К оцениванию геодезических сетей. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1983, вып. 38, с. 81—89. 5. *Монин И. И.* К теории параметрического способа уравнивания. — Геодезия и картография, 1983, № 9, с. 6—8. 6. *Юршанский З. М.* О едином алгоритме уравнивания параметрическим и коррелатным способами. — Применение геодезических методов при строительстве и эксплуатации инженерных сооружений, 1979, т. 7 (47), с. 72—85. 7. *Linder B. V.* Ein Verfahren zur automaticieren Aufstellung von Bedingungsgleichungen in Schleiclennetzen. — Z. Vermessungsw., 1983, Bd. 108, № 4, S. 160—166.

Статья поступила в редколлегию 01. 10. 84

УДК 528.11+519.654

И. Ф. МОНИН, Б. М. ДЖУМАН, Ю. В. МОРКОТУН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПО РАЗНОСТЯМ ИЗМЕРЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕННЫМ ВО ВСЕХ КОМБИНАЦИЯХ

Среднюю квадратическую ошибку одного измерения по Гауссу определяют:

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_1^n (l_i - L)^2}{n}, \tag{1}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений; n — число измерений; L — истинная величина измерения.

Вычислим разности измерений, взятые во всех комбинациях,

$$\begin{array}{r|l} l_2 - l_1,\ l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_1 & n-1 \\ l_3 - l_2, \cdots, l_n - l_2 & n-2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ l_n - l_{n-1} & 1. \end{array}$$