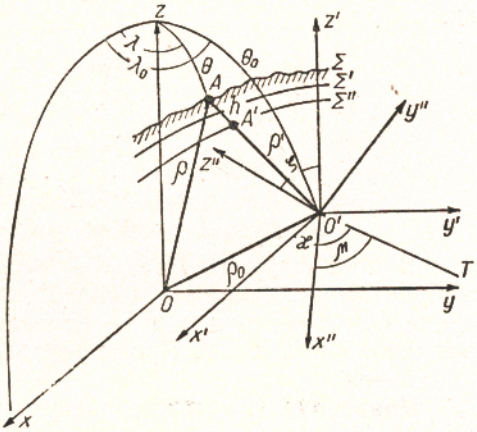
*И. Н. ГУДЗ*

# К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ И ОРИЕНТИРОВКИ ФИГУРЫ ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ЛИТОСФЕРЫ

Приняв за фигуру внешней поверхности литосферы Земли сжатый двухосный эллипсоид вращения, который самым лучшим образом подходил бы к этой поверхности, Н. К. Мигаль в 1954 г. [3] определил размеры и ориентировку этого эллипсоида. Определение этих данных было осуществлено путем аппроксимации поверхности литосферы указанным эллипсоидом вращения. При этом предполагается, что если внешнюю поверхность литосферы аппроксимировать сжатым эллипсоидом вращения, то может оказаться, что он не совпадает с фигурой геоида, за которую обычно принимают эллипсоид Красовского. Таким образом, в данном случае идет речь об определении фигуры внешней поверхности литосферы Земли и ее ориентировки по отношению к фигуре современного геоида (эллипсоида Красовского).




По Н. К. Мигалю [3], сущность решения этой задачи сводится к следующему. Пусть на рисунке: $\Sigma$ — физическая поверхность Земли или внешняя поверхность литосферы, $\Sigma'$ — современный геоид (эллипсоид Красовского), $\Sigma''$ — сжатый двухосный эллипсоид вращения, наиболее близко подходящий к поверхности $\Sigma$. Предполагается, что центры обоих эллипсоидов не совпадают: $O$ — центр эллипсоида Красовского, $O'$ — центр эллипсоида $\Sigma''$. Кроме того, $O$ является началом координат системы $Oxyz$, которая связана с геоидом, причем ось $Oz$ направлена вдоль оси вращения Земли, оси $Ox$ и $Oy$ лежат в плоскости экватора так, что ось $Ox$ лежит еще в плоскости начального меридиана (меридиана Гринвича). $O'$ является центром систем координат $O'x'y'z'$ и $O'x''y''z''$, причем оси первой системы параллельны осям системы $Oxyz$, оси второй системы связаны с эллипсоидом $\Sigma''$ так, что ось $O'z''$ направлена вдоль оси вращения этого же эллипсоида и образует с осью $O'z'$ угол $\zeta$, то есть один из трех углов Эйлера. Остальные два угла Эйлера, позволяющие вместе с $\zeta$ определить положение новой координатной системы ($O'x''y''z''$) относительно старой системы

$(O'x'y'z')$, будут: угол $\varkappa$ — между осью $O'x'$ и прямой $O'T$, пересечения плоскостей $x'O'y'$ и $x''O'y''$, и угол $\mu$ — между прямой $O'T$ и направлением $O'x''$. Как видно из рисунка, положение центра $O'$ эллипсоида $\Sigma''$ относительно центра $O$ эллипсоида Красовского определяется величинами $\rho_0$, $\Theta_0$ и $\lambda_0$, где $\rho_0$ — радиус-вектор $OO'$, $\Theta_0$ и $\lambda_0$ — соответственно полярное расстояние и долгота точки $O'$ в системе $Oxyz$. Если взять теперь какую-нибудь точку, например точку $A$, на поверхности $\Sigma$, радиусы-векторы которой от центров эллипсоидов $\Sigma'$ и $\Sigma''$ соответственно будут $OA=\rho$ и $O'A=\rho'$, то радиус-вектор $\rho'$ пересечет поверхность $\Sigma''$ в некоторой точке $A'$. Пусть расстояние $O'A'=p$, тогда расстояние $h=A'A$ от поверхности эллипсоида $\Sigma''$ до внешней поверхности литосферы будет:

$$h=\rho'-p. \tag{1}$$

Если теперь по этой формуле найти $h$ через определенные интервалы по $\Theta$ и долготе для всей Земли, то по условию $[h^2]=\text{minimum}$ можно вычислить размеры эллипсоида $\Sigma''$ и его ориентировку относительно эллипсоида $\Sigma'$.

Н. К. Мигаль [3] получил рабочую формулу для $h$, которая имеет такой вид:

$$\begin{aligned} h=&A\cos\Theta+B\sin\Theta\cos\lambda+C\sin\Theta\sin\lambda+D\cos^2\Theta+\\ &+K\sin 2\Theta\cos\lambda+M\sin 2\Theta\sin\lambda-\Delta a+H, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} A&=-\rho_0\cos\Theta_0,\\ B&=-\rho_0\sin\Theta_0\cos\lambda_0,\\ C&=-\rho_0\sin\Theta_0\sin\lambda_0,\\ D&=-a_0+a(1+\Delta a),\\ K&=a(1+\Delta a)\zeta\sin\varkappa,\\ M&=-a(1+\Delta a)\zeta\cos\varkappa. \end{aligned} \tag{3}$$

В этой формуле $\Theta$ и $\lambda$ — полярное расстояние и долгота какой-нибудь точки, например точки $A$, физической поверхности Земли в системе $Oxyz$; $\alpha_0$, $a_0$ и $\alpha$, $a$ — соответственно сжатие и большая полуось эллипсоидов $\Sigma'$ и $\Sigma''$. Кроме того, было принято, что $a_0=1$, а величина $\Delta a=a-a_0$.

Уравнение (2) можно рассматривать здесь как уравнение погрешностей. Так как в него входит $H$ — высота или глубина точки земной поверхности с координатами $\Theta$ и $\lambda$, то совершенно ясно, что таких уравнений будет столько, сколько имеется точек, для которых известны величины $H$. Если еще эти точки в отдельных широтных поясах, симметричных относительно экватора, взять через одинаковые интервалы по долготе, составление и решение нормальных уравнений значительно упростится. В данном случае они имеют такой общий вид:

$$\begin{aligned} &[\cos^2\Theta]A+[H\cos\Theta]=0,\\ &[\sin^2\Theta\cos^2\lambda]B+[H\sin\Theta\cos\lambda]=0,\\ &[\sin^2\Theta\sin^2\lambda]C+[H\sin\Theta\sin\lambda]=0,\\ &[\cos^4\Theta]D-[\cos^2\Theta]\Delta a+[H\cos^2\Theta]=0,\\ &[\sin^2 2\Theta\cos^2\lambda]K+[H\sin 2\Theta\cos\lambda]=0,\\ &[\sin^2 2\Theta\sin^2\lambda]M+[H\sin 2\Theta\sin\lambda]=0,\\ &-[\cos^2\Theta]D+[n]\Delta a-[H]=0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $n$ — число уравнений погрешностей.

В результате решения этих уравнений получают неизвестные $A$, $B$, $C$, $D$, $K$, $M$ и $\Delta a$, с которыми, используя уравнения (2), находят $\Theta_0$, $\lambda_0$, $\rho_0$, $a$, $\alpha$, $\varkappa$ и $\zeta$, определяющие размер и ориентировку искомого эллипсоида внешней поверхности литосферы.

Исходными данными при решении уравнений (4) Н. К. Мигалем были величины $H$ — средние высоты и глубины, полученные им по картматериалам Большого советского атласа мира. Предварительно весь земной шар был разделен на десятиградусные широтные пояса, которые, начиная от меридиана Гринвича и до параллели с широтой $\varphi=70°$ в обоих полушариях, были разделены на трапеции размером $10\times10°$; оба пояса, ограниченные параллелями с широтами 70 и 80°, разделены на трапеции размером $10\times20°$, а оба приполюсные пояса соответственно разделены на сферические треугольники с основанием по долготе 45°. Средние высоты и глубины $H$ для каждой отдельной трапеции определялись как среднее арифметическое по весам из средних высот и глубин отдельных составных частей трапеции; при этом за веса принимались площади этих составных частей, а вес, равный единице, принимался для площади всей трапеции. Полученные таким образом величины $H$, которые округлялись до целых сотен метров, выражались затем в долях большой полуоси $a_0$ эллипсоида Красовского.

Проделав всю эту работу, Н. К. Мигаль составил 556 уравнений типа (2), а также составил и решил уравнения (4), в результате чего были получены искомые величины, определяющие размер и ориентировку эллипсоида $\Sigma''$ относительно эллипсоида $\Sigma'$. Эти величины сведены во второй столбик приводимой ниже таблицы.

Необходимо отметить, что описанное выше деление всей поверхности Земли на трапеции имеет некоторый недостаток, состоящий в том, что площади трапеций, уменьшая свою величину при приближении к полюсам, то есть не оставаясь эквивалентными, имеют в данном случае один и тот же вес. В связи с этим, используя приведенные выше формулы Н. К. Мигаля, мы также определили размеры и ориентировку эллипсоида внешней поверхности литосферы Земли, но в данном случае использовали данные о средних высотах и глубинах $H$ равноплощадных трапеций, приведенные в работе И. Д. Жонголовича [2]. Кроме того, эти данные являются более точными, чем аналогичные данные Н. К. Мигаля, и их мы также выражали в долях большой полуоси $a_0$ эллипсоида Красовского. На основании 410 уравнений погрешностей были составлены в соответствии с (4) нормальные уравнения, которые с числовыми величинами имели такой вид:

$$+137{,}020\,A+24{,}640=0,$$

$$+136{,}490\,B+21{,}559=0,$$

$$+136{,}490\,C+14{,}664=0,$$

$$+82{,}418\,D-137{,}020\,\Delta a-38{,}837=0,$$

$$+109{,}205\,K+10{,}612=0,$$

$$+109{,}205\,M+11{,}191=0,$$

$$-137{,}020\,D+410{,}000\,\Delta a+148{,}394=0.$$

В результате решения этих уравнений неизвестные получили следующие значения: $A=-0{,}17983$, $B=-0{,}15795$, $C=-0{,}10744$, $D=-0{,}29365$, $K=-0{,}09718$, $M=-0{,}10248$ и $\Delta a=-0{,}46007$. С ними

с учетом (3) были получены размеры и ориентировка эллипсоида $\Sigma''$: эти данные помещены в последнем столбике приводимой здесь таблицы.

**Данные о размерах и ориентировке фигуры внешней поверхности литосферы $\Sigma''$**

| Определяемые величины | Из вычислений | |
|---|---|---|
| | Н. К. Мигаля | автора |
| Координаты центра эллипсоида $\Sigma''$ (относительно центра эллипсоида $\Sigma'$): $\Theta_0$ | 46°35' | 46°43',8 |
| $\lambda_0$ | 37°01' | 34°13',5 |
| $\rho_0$ | 1682 *м* | 1673 *м* |
| Угол $\varkappa$, определяющий направление линии узлов | 137°36' | 136°31',2 |
| Угол поворота $\zeta$ | —2°16' | —2°38',7 |
| Сжатие $\alpha$ эллипсоида $\Sigma''$ | 1:329,5 | 1:326,8 |
| Большая полуось $a$ эллипсоида $\Sigma''$ | 6 375 165 *м* | 6 375 311 *м* |
| Координаты северного полюса эллипсоида $\Sigma''$: $\varphi$ | 87°44' | 87°21',3 |
| $\lambda$ | 132°24' | 133°28',2' |

Сравнивая данные этой таблицы, можно сделать вывод, что наши результаты и по величине, и по знаку почти такие же, как у Н. К. Мигаля. При этом следует особо отметить, что такие величины, как $\varkappa$ и $\zeta$, с помощью которых определяются координаты северного полюса искомого эллипсоида, в обоих случаях почти одинаковы. Таким образом, отмеченная выше неточность определения Н. К. Мигалем средних высот и глубин $H$ слабо повлияла на конечный результат.

Что касается карт распределения суши и моря, составленных нами [1] по данным Н. К. Мигаля, то они остаются в силе, так как малые отличия исходных величин $\zeta$ и $\varkappa$, полученных Н. К. Мигалем и нами, не внесут заметного изменения в расположение береговой линии на указанных картах.

## ЛИТЕРАТУРА


1. И. Н. Гудз. Вековое изменение высот и береговых линий в связи с перемещением полюсов Земли. Научные записки Львовского политехнического института, сер. геодез., № 8, Львов, 1961.

2. И. Д. Жонголович. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Труды Института теоретической астрономии, вып. III. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1952.

3. Н. К. Мигаль. Фигура Земли и геотектоника. Научные записки Львовского политехнического института, вып. XVIII, сер. геодез., № 2. Львов, 1954.



Работа поступила
16 октября 1965 г.