А. Е. ФИЛИППОВ

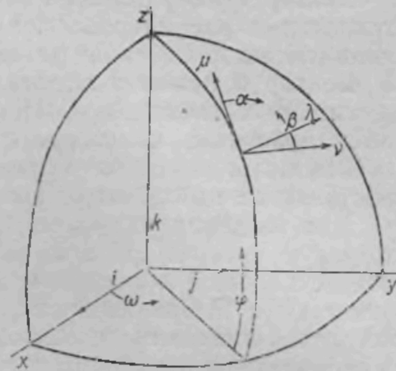
МЕТОД ХОТИНА СОВМЕСТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАНОВЫХ И ВЫСОТНЫХ КООРДИНАТ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ ПУНКТОВ

Как известно, в основе классического метода обработки результатов геодезических измерений лежит раздельное определение плановых координат точек земной поверхности и высот. Вычисление плановых координат (геодезические широты и долготы) выполняется на принятом референц-эллипсоиде, к поверхности которого предварительно должны быть приведены измеренные длины линий и горизонтальные углы (в этом смысле классическую геодезию называют иногда двухмерной). Вычисление геодезических высот осуществляется затем на основе геометрического, астрономического и астрономо-гравиметрического нивелирования с использованием уже полученных плановых координат. С указанным подходом связано возникновение редукционной проблемы, имеющей свои специфические трудности, а также то обстоятельство, что в целом задача решается методом последовательных приближений.

В настоящее время в геодезической литературе все чаще и чаще обсуждаются вопросы так называемой трехмерной геодезии. Под этим термином (который, правда, не все считают вполне удачным) понимают метод одновременного или совместного определения как плановых координат точек земной поверхности, так и их высот, из измерений геометрического характера. Исходным материалом для решения задачи являются результаты измерений длин линий, горизонтальных и вертикальных углов в сети треугольников триангуляции, а также астрономических широт, долгот и азимутов в отдельных пунктах этой сети. Вычисление искомых неизвестных осуществляется путем совместного уравнивания указанных видов измерений.

Идея трехмерной геодезии как чисто геометрического метода определения фигуры физической поверхности Земли была высказана еще Брунсом [2], который указывал, что сеть треугольников триангуляции на земной поверхности образует геометрическую фигуру — полиэдр. В каждой вершине полиэдра зафиксировано с помощью уровня положение вертикальной оси угломерного инструмента. Если измерена одна из сторон полиэдра, а также горизонтальные и вертикальные углы в его вершинах, то этих данных достаточно для нахождения в произвольной системе пространственных координат положения всех вершин полиэдра и параметров, определяющих в каждой вершине направление вертикальной оси инструмента или отвесной линии. Если в одной из вершин выполнены астрономические определения широты, долготы и азимута, то система координат может быть ориентирована относительно плоскости земного экватора и начального астрономического меридиана, и для всех остальных вершин астрономические координаты и астрономические азимуты будут получены из вычислений. Брунс наметил путь решения задачи, указав общую форму уравнений погрешностей, возникающих в указанном полиэдре.

Позднее к идее определения фигуры физической поверхности Земли по указанным выше видам измерений вернулся М. С. Молоденский [1], но наиболее детально, вплоть до получения всех необходимых формул, задачу рассмотрел Хотин [3, 4].



Основным препятствием для практического применения рассматриваемого метода является сложность учета вертикальной рефракции. Однако при достаточном количестве избыточных измерений и некоторых предположениях поправки за влияние рефракции могут быть определены в процессе уравнительных вычислений. Положительный опыт использования зенитных расстояний при обработке относительно небольших триангуляционных сетей уже имеется за рубежом.

Настоящая статья представляет собой сокращенное изложение работы Хотина «*Начала неклассической геодезии*» [4], точнее, тех ее разделов, в которых рассматривается метод определения пространственных координат триангуляционных пунктов из совместного уравнивания горизонтальных углов и зенитных расстояний. Поскольку в отечественной литературе фактически нет работ, посвященных пространственному уравниванию триангуляции (имеется в виду обычная, «земная» триангуляция, а не ракетная или космическая), мы считаем, что подобное изложение принесет известную пользу.

Желая сделать содержание более доступным для широкого круга геодезистов, мы освободились от тензорной символики, которую использовал автор. Последовательность вывода формул и система обозначений остались в основном неизменными.

1. **Определения.** В дальнейшем будем использовать следующие три системы пространственных координат, в каждой из которых однозначно определяется положение любой точки земной поверхности: систему прямолинейных прямоугольных (декартовых) координат, систему геодезических координат и астрономическую систему. Рисунок, помещенный на этой странице, в некоторой степени иллюстрирует материал, излагаемый в настоящем разделе.

Пространственные прямолинейные прямоугольные координаты x, y, z. За начало системы примем произвольную точку o внутри Земли. Для практических целей желательно, чтобы эта точка располагалась по возможности наиболее близко к центру инерции Земли. Положительную ось oz направим к северу параллельно оси вращения Земли, следовательно, плоскость xoy окажется параллельной плоскости земного экватора. Положительную ось ox расположим в плоскости, параллельной плоскости астрономического меридиана в Гринвиче. Последняя плоскость определяется отвесной линией в Гринвиче и прямой, параллельной оси вращения Земли. Положительную ось oy направим на 90° к востоку от оси ox. Система координат скреплена с Землей и участвует в ее вращении. Положение любой точки в этой системе однозначно определится декартовыми координатами x, y, z.

С рассмотренной системой свяжем три единичных взаимно ортогональных векторных поля $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ одновременно являются основными ортами соответственно осей ox, oy, oz.

Астрономические и геодезические координаты. Для введения астрономической системы сопоставим каждой точке пространства три взаимно ортогональных единичных вектора $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, определив их следующим образом.

Вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен по внешней нормали к эквипотенциальной поверхности в рассматриваемой точке (или по касательной к силовой линии потенциала силы тяжести).

Вектор $\boldsymbol{\mu}$ лежит в плоскости астрономического меридиана (в плоскости $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{k}$) и касателен к эквипотенциальной поверхности, положительное направление к северу.

Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ касается эквипотенциальной поверхности и дополняет пространственный трехгранник, положительное направление к востоку.

Для введения геодезической системы рассмотрим вспомогательную отсчетную поверхность в виде эллипсоида вращения (референц-эллипсоид) с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Центр эллипсоида совместим с выбранным началом декартовых координат, точкой o, а малую ось направим по оси oz. За начальный геодезический меридиан на референц-эллипсоиде примем меридиан, в плоскости которого располагается ось ox. Таким образом, малая ось референц-эллипсоида окажется параллельной оси вращения Земли, а плоскость начального геодезического меридиана — параллельной плоскости астрономического меридиана в Гринвиче.

Вместе с введением референц-эллипсоида рассмотрим еще один ряд единичных взаимно ортогональных векторов, которые будем обозначать теми же буквами $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, что и астрономические векторы. В данном случае $\boldsymbol{\nu}$ определяет направление внешней нормали к референц-эллипсоиду, проходящей через рассматриваемую точку, $\boldsymbol{\mu}$ лежит в плоскости $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{k}$ и перпендикулярен к $\boldsymbol{\nu}$ (положительное направление к северу), $\boldsymbol{\lambda}$ дополняет пространственный трехгранник (положительное направление к востоку). Во всех случаях, когда оба ряда векторов будут использоваться совместно, обозначения одного из этих рядов будут отмечаться черточками, например $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, $\bar{\boldsymbol{\nu}}$. Заметим, что векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ образуют в указанном порядке правые системы.

Как в астрономической, так и в геодезической системах долготы и широты определим с помощью соответствующих векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$.

Долгота ω есть угол между плоскостями $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{k}$; положительное направление отсчета в положительном направлении вращения вокруг $\mathbf{k}$, то есть от $\mathbf{i}$ к $\mathbf{j}$ или к востоку.

Широта φ есть угол между вектором $\boldsymbol{\nu}$ и плоскостью $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$; положительное направление отсчета к северу.

В качестве третьей координаты в астрономической системе примем геопотенциал или разность между потенциалом силы тяжести на уровне моря и в рассматриваемой точке. Поскольку в дальнейшем эта координата использоваться не будет, обозначения для нее не вводим. В геодезической системе третьей координатой будет геодезическая высота h, равная длине отрезка внешней нормали к референц-эллипсоиду от его поверхности до рассматриваемой точки.

Из сделанных только что определений следует, что плоскость $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ является начальной плоскостью для отсчета как астрономических, так и геодезических долгот.

Связь между геодезическими и декартовыми ко... ...кие ...ляется известными формулами ...и

$$x=(\nu+h)\cos\varphi\cos\omega;$$

$$y=(\nu+h)\cos\varphi\sin\omega;$$

$$z=(\nu+h)\sin\varphi-\nu e^2\sin\varphi=(\nu\bar{e}^2+h)\sin\varphi,$$

где $\nu=a(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ — радиус кривизны сечения первого ... на референц-эллипсоиде в точке с широтой φ, e — первый экс... ситет меридианного эллипса, $\bar{e}^2=1-e^2$.

Пусть $\mathbf{l}$ единичный пространственный вектор, направление котор... го характеризуется азимутом α и зенитным расстоянием β. И в астрономической, и в геодезической системах азимут α определим как угол между плоскостями $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{l}$, отсчитываемый от севера к востоку, то есть от $\boldsymbol{\mu}$ к $\boldsymbol{\lambda}$, а зенитное расстояние β как угол между $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{l}$. Нетрудно проверить, что вектор $\mathbf{l}$ будет тогда задан выражением

$$\mathbf{l}=\boldsymbol{\lambda}\sin\alpha\sin\beta+\boldsymbol{\mu}\cos\alpha\sin\beta+\boldsymbol{\nu}\cos\beta. \tag{2}$$

В правой части этого выражения все величины $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, α, β относятся к астрономической или к геодезической системе.

2. **Соотношения между фундаментальными векторами.** Нетрудно получить следующие разложения векторов $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ по основным ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ декартовой системы:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}&=-\mathbf{i}\sin\omega+\mathbf{j}\cos\omega;\\ \boldsymbol{\mu}&=-\mathbf{i}\sin\varphi\cos\omega-\mathbf{j}\sin\varphi\sin\omega+\mathbf{k}\cos\varphi;\\ \boldsymbol{\nu}&=\mathbf{i}\cos\varphi\cos\omega+\mathbf{j}\cos\varphi\sin\omega+\mathbf{k}\sin\varphi\end{aligned} \tag{3}$$

и обратные соотношения

$$\begin{aligned}\mathbf{i}&=-\boldsymbol{\lambda}\sin\omega-\boldsymbol{\mu}\sin\varphi\cos\omega+\boldsymbol{\nu}\cos\varphi\cos\omega,\\ \mathbf{j}&=\boldsymbol{\lambda}\cos\omega-\boldsymbol{\mu}\sin\varphi\sin\omega+\boldsymbol{\nu}\cos\varphi\sin\omega;\\ \mathbf{k}&=\boldsymbol{\mu}\cos\varphi+\boldsymbol{\nu}\sin\varphi.\end{aligned} \tag{4}$$

В выражениях (3) и (4) все величины $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, φ, ω, естественно, относятся к одной и той же системе, астрономической или геодезической. Если соответствующие функции в другой системе, но в той же точке пространства отметить черточками, то будем, например, иметь:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\lambda}}&=-\mathbf{i}\sin\bar{\omega}+\mathbf{j}\cos\bar{\omega};\\ \bar{\boldsymbol{\mu}}&=-\mathbf{i}\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\omega}-\mathbf{j}\sin\bar{\varphi}\sin\bar{\omega}+\mathbf{k}\cos\bar{\varphi};\\ \bar{\boldsymbol{\nu}}&=\mathbf{i}\cos\bar{\varphi}\cos\bar{\omega}+\mathbf{j}\cos\bar{\varphi}\sin\bar{\omega}+\mathbf{k}\sin\bar{\varphi},\end{aligned} \tag{5}$$

так как векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ являются общими для обеих систем.

Если декартовы компоненты единичного вектора $\mathbf{l}$ (азимут α, зенитное расстояние β) есть a, b, c, то

$$\mathbf{l}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}. \tag{6}$$

Подставив в (2) вместо $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ их выражения через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, согласно (3), и сопоставив результат с (6), получим

$$\begin{aligned}a&=-\sin\varphi\cos\omega\cos\alpha\sin\beta-\sin\omega\sin\alpha\sin\beta+\cos\varphi\cos\omega\cos\beta;\\ b&=-\sin\varphi\sin\omega\cos\alpha\sin\beta+\cos\omega\sin\alpha\sin\beta+\cos\varphi\sin\omega\cos\beta;\\ c&=\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta+\sin\varphi\cos\beta.\end{aligned} \tag{7}$$

Наоборот, подставив (4) в (6) и сравнив результат с (2), найдем

$$\begin{gathered} \sin\alpha\sin\beta=-a\sin\omega+b\cos\omega, \\ \cos\alpha\sin\beta=-a\sin\varphi\cos\omega-b\sin\varphi\sin\omega+c\cos\varphi, \\ \cos\beta=a\cos\varphi\cos\omega+b\cos\varphi\sin\omega+c\sin\varphi. \end{gathered} \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) удовлетворяются независимо от того, к какой системе — астрономической или геодезической — относятся вместе величины α, β, ω, φ, так как компоненты a, b, c являются одними и теми же для обеих систем. Если отметить другую систему черточками, то, согласно (8), будем, например, иметь

$$\sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}=-a\sin\bar{\omega}+b\cos\bar{\omega}.$$

Заменив в этом и двух других аналогичных уравнениях величины a, b, c их выражениями, согласно (7), получим следующие уравнения преобразования

$$\begin{gathered} \sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}=\sin\alpha\sin\beta\cos(\bar{\omega}-\omega)+\cos\alpha\sin\beta\sin\varphi\sin(\bar{\omega}-\omega); \\ \cos\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}=-\sin\alpha\sin\beta\sin\bar{\varphi}\sin(\bar{\omega}-\omega)+\cos\alpha\sin\beta[\cos\varphi\cos\bar{\varphi}+ \\ +\sin\varphi\sin\bar{\varphi}\cos(\bar{\omega}-\omega)]+\cos\beta[\sin\varphi\cos\bar{\varphi}-\cos\varphi\sin\bar{\varphi}\cos(\bar{\omega}-\omega)]; \\ \cos\bar{\beta}=\sin\alpha\sin\beta\cos\bar{\varphi}\sin(\bar{\omega}-\omega)+\cos\alpha\sin\beta[\cos\varphi\sin\bar{\varphi}- \\ -\sin\varphi\cos\bar{\varphi}\cos(\bar{\omega}-\omega)]+\cos\beta[\sin\varphi\sin\bar{\varphi}+\cos\varphi\cos\bar{\varphi}\cos(\bar{\omega}-\omega)]. \end{gathered} \tag{9}$$

Уравнения (9) позволяют перевычислять зенитное расстояние и азимут единичного вектора $\mathbf{l}$ из одной системы координат в другую. Однако их можно применять и в том случае, когда речь идет о вычислении зенитного расстояния $\bar{\beta}$ и азимута $\bar{\alpha}$ единичного вектора $\bar{\mathbf{l}}$ в другой точке того же самого пространства, отмеченной черточкой, если этот вектор параллелен вектору $\mathbf{l}$, потому что a, b, c для таких векторов одни и те же. В частности, они выполняются для прямой, соединяющей отчеркнутую и неотчеркнутую точки и дают возможность вычислить азимут и зенитное расстояние в конечной (отчеркнутой) точке этой прямой. Следует только иметь в виду, что $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ относятся к тому же направлению, что и α, β; $\bar{\beta}$ следует отнять от 180° и 180° добавить к $\bar{\alpha}$, чтобы получить величины, относящиеся к обратному направлению. Разумеется, величины $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, α, β, $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$, ω, φ для отчеркнутой и неотчеркнутой точек все должны относиться или к астрономической или к геодезической системе координат.

В каждой из групп уравнений (7), (8), (9) только два уравнения независимы, так как $a^2+b^2+c^2=1$; третье уравнение обеспечивает контроль вычислений.

3. **Условия в исходном пункте триангуляции**. Уравнения (9), которые можно рассматривать как уравнения преобразования зенитных расстояний и азимутов из астрономической (неотчеркнутой) системы в геодезическую (отчеркнутую), выведены при предположении, что малая ось референц-эллипсоида (ось oz) параллельна оси вращения Земли, а плоскость начального геодезического меридиана (плоскость xoz) параллельна плоскости астрономического меридиана в Гринвиче. При соблюдении указанных условий уравнения (9) должны выполняться для любого направления как в исходном пункте триангуляции, так и в любой другой точке пространства. Если в исходном пункте

принять измеренные значения за α, β, ω, φ, то начальные геодезические значения $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$ нужно выбрать так, чтобы уравнения (9) были удовлетворены. Однако геометрически очевидно, что для единственного направления $\mathbf{l}$, выходящего из исходного пункта (действительного, физического направления в пространстве между двумя точками), выполнение условий (9) не зависит от поворота геодезической системы вокруг вектора $\mathbf{l}$ на произвольный угол, так как при таком повороте $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varphi}$ остаются неизменными. Следовательно, для обеспечения указанного параллелизма необходимо удовлетворить уравнения (9) для двух направлений, выходящих из исходного пункта.

Разности между астрономической и геодезической системами обычно невелики, и если принять, что $\bar{\alpha}=\alpha-\delta\alpha$, $\bar{\beta}=\beta-\delta\beta$ и т. д., то с точностью до членов первого порядка малости уравнения (9) приведутся к следующему виду:

$$\delta\alpha=\sin\varphi\,\delta\omega+\operatorname{ctg}\beta\,(\sin\alpha\,\delta\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\,\delta\omega);$$

$$\delta\beta=-\cos\varphi\sin\alpha\,\delta\omega-\cos\alpha\,\delta\varphi. \tag{10}$$

Заметим, что, не нарушая точности в уравнениях (10), астрономические значения φ и α можно заменить геодезическими.

Простейший способ удовлетворения условий (10) в исходном пункте заключается в том, чтобы принять за начальные геодезические элементы астрономически измеренные значения широты, долготы и азимута, а также значения двух измеренных зенитных расстояний, исправленных за рефракцию. За начальную геодезическую высоту можно принять, например, высоту исходного пункта над уровнем моря, полученную из геометрического нивелирования.

4. **Дифференцирование фундаментальных векторов.** Найдем выражения для дифференциалов или малых изменений единичных векторов $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{l}$. Рассматривая $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ как функции от координат ω, φ, получим на основании формул (3) и (4) при постоянных $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

$$d\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\mu}\sin\varphi-\boldsymbol{\nu}\cos\varphi)\,d\omega;$$

$$d\boldsymbol{\mu}=-\boldsymbol{\lambda}\sin\varphi\,d\omega-\boldsymbol{\nu}\,d\varphi; \tag{11}$$

$$d\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}\cos\varphi\,d\omega+\boldsymbol{\mu}\,d\varphi$$

Единичный вектор $\mathbf{l}$, направление которого в точке с координатами ω, φ характеризуется азимутом α и зенитным расстоянием β, определяется выражением (2), то есть

$$\mathbf{l}=\boldsymbol{\lambda}\sin\alpha\sin\beta+\boldsymbol{\mu}\cos\alpha\sin\beta+\boldsymbol{\nu}\cos\beta.$$

Дифференцируя это выражение по переменным $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$, α, β и принимая во внимание (11), найдем

$$d\mathbf{l}=(\boldsymbol{\lambda}\cos\alpha\sin\beta-\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta)\,d\alpha+(\boldsymbol{\lambda}\sin\alpha\cos\beta+\boldsymbol{\mu}\cos\alpha\cos\beta-$$

$$-\boldsymbol{\nu}\sin\beta)\,d\beta+\sin\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{\mu}\sin\varphi-\boldsymbol{\nu}\cos\varphi)\,d\omega-$$

$$-\cos\alpha\sin\beta\,(\boldsymbol{\lambda}\sin\varphi\,d\omega+\boldsymbol{\nu}\,d\varphi)+\cos\beta\,(\boldsymbol{\lambda}\cos\varphi\,d\omega+\boldsymbol{\mu}\,d\varphi). \tag{12}$$

Обозначим единичный вектор в азимуте α и зенитном расстоянии $\frac{\pi}{2}+\beta$ через $\mathbf{m}$, а единичный вектор в азимуте $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ и зенитном расстоянии $\frac{\pi}{2}$ через $\mathbf{n}$. В соответствии с (2)

$$\mathbf{m}=\boldsymbol{\lambda}\sin\alpha\cos\beta+\boldsymbol{\mu}\cos\alpha\cos\beta-\boldsymbol{\nu}\sin\beta; \tag{13}$$

$$\mathbf{n}=-\boldsymbol{\lambda}\cos\alpha+\boldsymbol{\mu}\sin\alpha. \tag{14}$$

Единичные векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ образуют правую в указанном порядке систему взаимно ортогональных векторов.

Выражение (12) нетрудно привести теперь к следующему окончательному виду:

$$d\mathbf{l}=\mathbf{m}\,[d\beta+\cos\varphi\sin\alpha\, d\omega+\cos\alpha\, d\varphi]+\mathbf{n}\,[-\sin\beta\, d\alpha+$$
$$+(\sin\varphi\sin\beta-\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta)\, d\omega+\sin\alpha\cos\beta\, d\varphi]. \tag{15}$$

Из уравнения (15) следует, что вектор $d\mathbf{l}$ расположен в плоскости $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и потому ортогонален к единичному вектору $\mathbf{l}$.

5. **Прямая линия в пространстве.** Рассмотрим прямую длиной s, соединяющую точку A с точкой B. Координаты точки B будем отмечать черточками. Пусть $\mathbf{l}$ — единичный вектор направления от A к B и a, b, c — его составляющие в декартовой системе. Тогда

$$a=\frac{\bar{x}-x}{s},\quad b=\frac{\bar{y}-y}{s},\quad c=\frac{\bar{z}-z}{s}. \tag{16}$$

Подставив эти выражения в (8) и используя (1), придем после небольших преобразований к следующим уравнениям, справедливым в геодезической системе:

$$s\sin\alpha\sin\beta=(\bar{\nu}+\bar{h})\cos\bar{\varphi}\sin(\bar{\omega}-\omega);$$
$$s\cos\alpha\sin\beta=(\bar{\nu}+\bar{h})\,[\sin\bar{\varphi}\cos\varphi-\cos\bar{\varphi}\sin\varphi\cos(\bar{\omega}-\omega)]-$$
$$-e^2\cos\varphi\,(\bar{\nu}\sin\bar{\varphi}-\nu\sin\varphi); \tag{17}$$
$$s\cos\beta=(\bar{\nu}+\bar{h})\,[\sin\bar{\varphi}\sin\varphi+\cos\bar{\varphi}\cos\varphi\cos(\bar{\omega}-\omega)]-$$
$$-(\nu+h)-e^2\sin\varphi\,(\bar{\nu}\sin\bar{\varphi}-\nu\sin\varphi).$$

Уравнения (17) позволяют вычислить азимут, зенитное расстояние в начальной точке линии, а также длину последней, если известны координаты конечных точек линии. Азимут $\bar{\alpha}$ и зенитное расстояние $\bar{\beta}$ продолжения линии в конечной точке получим, если в уравнениях (17) поменяем местами черточки и изменим на обратный знак s, так как длина будет отсчитываться в этом случае в направлении от B к A. Например, первое из уравнений (17) примет вид

$$s\sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}=(\nu+h)\cos\varphi\sin(\bar{\omega}-\omega).$$

Нетрудно показать, что для всех точек прямой линии

$$(\nu+h)\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi=\mathrm{const}. \tag{18}$$

Задачу определения геодезических координат конечной (отчеркнутой) точки прямой линии по известным координатам, азимуту, зенитному расстоянию в начальной (неотчеркнутой) точке и длине линии можно решить с помощью выражений (1), (7) и (16). Принимая временно за начало счета геодезических долгот начальную точку линии, без труда получим

$$(\bar{\nu}+\bar{h})\cos\bar{\varphi}\cos(\bar{\omega}-\omega)=(\nu+h)\cos\varphi-s\sin\varphi\cos\alpha\sin\beta+s\cos\varphi\cos\beta;$$
$$(\bar{\nu}+\bar{h})\cos\bar{\varphi}\sin(\bar{\omega}-\omega)=s\sin\alpha\sin\beta; \tag{19}$$
$$(\bar{\nu}\bar{e}^2+\bar{h})\sin\bar{\varphi}=(\bar{e}^2\nu+h)\sin\varphi+s\cos\varphi\cos\alpha\sin\beta+s\sin\varphi\cos\beta.$$

Разность долгот $\bar{\omega}-\omega$ находим сразу же путем деления первых двух уравнений. Широту и высоту определим затем последовательными приближениями из системы уравнений

$$(\bar{\nu}+\bar{h})\cos\bar{\varphi}=P;$$
$$(\bar{\nu}\bar{e}^2+\bar{h})\sin\bar{\varphi}=Q,$$

в которых P и Q будут величинами известными. Начальное значение широты $\bar{\varphi}$ можно получить из выражения

$$\bar{e}^2\operatorname{tg}\bar{\varphi}=\frac{Q}{P}.$$

6. **Плоский треугольник в пространстве.** В настоящем разделе будем пренебрегать уклонениями отвеса, то есть будем считать, что на каждом пункте триангуляции отвесная линия совпадает с нормалью к референц-эллипсоиду.

Прямые, соединяющие каждые два смежных пункта, образуют в пространстве систему плоских треугольников. Если $\mathbf{l}$ и $\bar{\mathbf{l}}$ — единичные векторы двух сторон в какой-либо вершине (астрономические азимуты и зенитные расстояния соответственно α, β и $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$), то угол L между этими сторонами определится из выражения

$$\cos L=\mathbf{l}\cdot\bar{\mathbf{l}},$$

где $\mathbf{l}\cdot\bar{\mathbf{l}}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{l}$ и $\bar{\mathbf{l}}$. Воспользовавшись разложением (2), получим

$$\cos L=\sin\alpha\sin\beta\sin\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}+\cos\alpha\sin\beta\cos\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}+\cos\beta\cos\bar{\beta}=$$
$$=\cos\beta\cos\bar{\beta}+\sin\beta\sin\bar{\beta}\cos(\bar{\alpha}-\alpha). \tag{20}$$

Подобным же образом будут найдены и остальные углы в треугольниках. Разность $\bar{\alpha}-\alpha$, очевидно, есть ни что иное, как горизонтальный угол, измеренный на пункте между двумя направлениями.

Одну сторону треугольника мы всегда будем знать из непосредственных измерений или из предшествующих вычислений. Остальные стороны будут найдены по известной теореме синусов. Если треугольник включает исходный пункт триангуляции, то будут известны геодезические координаты последнего, длина, азимут и зенитное расстояние выходной стороны, а также зенитное расстояние второй стороны. Координаты и азимуты двух других вершин треугольника можно будет вычислить по формулам предыдущего раздела. Во всех остальных случаях из предшествующих вычислений будут известны координаты и азимуты в двух точках, и по каждой из них мы получим координаты и азимуты в третьей точке.

7. **Вариация геодезических координат.** Найдем изменения длины, азимута и зенитного расстояния прямой линии в зависимости от изменений координат ее конечных точек. Пусть $\mathbf{l}$ единичный вектор рассматриваемой прямой. Отмечая координаты конечной точки линии черточками, напишем

$$s\mathbf{l}=\mathbf{i}(\bar{x}-x)+\mathbf{j}(\bar{y}-y)+\mathbf{k}(\bar{z}-z).$$

Дифференцируем это выражение по координатам при постоянных $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$

$$s\,d\mathbf{l}+\mathbf{l}\,ds=\mathbf{i}\,d(\bar{x}-x)+\mathbf{j}\,d(\bar{y}-y)+\mathbf{k}\,d(\bar{z}-z). \tag{21}$$

Вектор $d\mathbf{l}$ ортогонален к $\mathbf{l}$, поэтому, умножая обе части выражения (21) скалярно на $\mathbf{l}$, получим

$$ds=\mathbf{l}\cdot[\mathbf{i}d(\bar{x}-x)+\mathbf{j}d(\bar{y}-y)+\mathbf{k}d(\bar{z}-z)]=$$
$$=\bar{\mathbf{l}}\cdot(\mathbf{i}d\bar{x}+\mathbf{j}d\bar{y}+\mathbf{k}d\bar{z})-\mathbf{l}\cdot(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz). \quad (22)$$

Здесь под $\bar{\mathbf{l}}$ мы понимаем единичный вектор в конечной точке, параллельный вектору $\bar{\mathbf{l}}$.

Скалярные произведения $\mathbf{l}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{j}$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{k}$ представляют собой составляющие a, b, c вектора $\mathbf{l}$ по осям декартовой системы. Они определяются формулами (7). Составляющие $\bar{a}=\bar{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{i}$, $\bar{b}=\bar{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{j}$, $\bar{c}=\bar{\mathbf{l}}\cdot\mathbf{k}$ вектора $\bar{\mathbf{l}}$ по тем же осям, соответственно равные величинам a, b, c, определяются теми же формулами (7). В последнем случае все входящие в них величины мы отметили черточками.

Выражение (22) можно записать теперь так:

$$ds=a(d\bar{x}-dx)+b(d\bar{y}-dy)+c(d\bar{z}-dz)=$$
$$=(\bar{a}d\bar{x}+\bar{b}d\bar{y}+\bar{c}d\bar{z})-(adx+bdy+cdz). \quad (23)$$

Дифференцируя формулы (1), нетрудно получить для начальной точки линии

$$dx=(\nu+h)\cos\varphi\sin\omega d\omega-(\rho+h)\sin\varphi\cos\omega d\varphi+\cos\varphi\cos\omega dh;$$
$$dy=(\nu+h)\cos\varphi\cos\omega d\omega-(\rho+h)\sin\varphi\sin\omega d\varphi+\cos\varphi\sin\omega dh; \quad (24)$$
$$dz=(\rho+h)\cos\varphi d\varphi+\sin\varphi dh,$$

где $\rho=a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ — радиус кривизны меридиана референц-эллипсоида на широте φ. Эти же формулы будут справедливы и для конечной точки линии, если только над всеми буквами поставить черточки.

Используя (24), (7) и принимая во внимание (18), получим на основании (23) следующее выражение для ds в системе геодезических координат

$$ds=(\nu+h)\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta(d\bar{\omega}-d\omega)+(\bar{\rho}+\bar{h})\cos\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}d\bar{\varphi}-$$
$$-(\rho+h)\cos\alpha\sin\beta d\varphi+\cos\bar{\beta}d\bar{h}-\cos\beta dh. \quad (25)$$

Здесь $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ относятся, как обычно, к продолжению линии через отчеркнутую точку. Формула (25) выражает изменение длины линии в зависимости от изменения геодезических координат ее конечных точек.

Снова обратимся теперь к выражениям (21) и (23). Исключив из них ds, получим

$$sd\mathbf{l}=-\mathbf{l}[ad(\bar{x}-x)+bd(\bar{y}-y)+cd(\bar{z}-z)]+\mathbf{i}d(\bar{x}-x)+$$
$$+\mathbf{j}d(\bar{y}-y)+\mathbf{k}d(\bar{z}-z). \quad (26)$$

Разложим $sd\mathbf{l}$ по направлениям $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$

$$sd\mathbf{l}=(sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{m})\mathbf{m}+(sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (27)$$

Далее, с помощью (26) находим:

$$sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{m}=(\mathbf{m}\cdot\mathbf{i})d(\bar{x}-x)+(\mathbf{m}\cdot\mathbf{j})d(\bar{y}-y)+(\mathbf{m}\cdot\mathbf{k})d(\bar{z}-z),$$
$$sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})d(\bar{x}-x)+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})d(\bar{y}-y)+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})d(\bar{z}-z). \quad (28)$$

Вычислив скалярные произведения в правых частях последних формул и приняв во внимание (24), получим после некоторых преобразований

$$sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{m}=\overline{m}_1d\overline{\omega}+\overline{m}_2d\overline{\varphi}+\overline{m}_3d\overline{h}-m_1d\omega-m_2d\varphi-m_3dh;$$

$$sd\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=\overline{n}_1d\overline{\omega}+\overline{n}_2d\overline{\varphi}+\overline{n}_3d\overline{h}-n_1d\omega-n_2d\varphi-n_3dh,$$

где

$$\begin{aligned} &m_1=(\nu+h)\cos\varphi\sin\alpha\cos\beta; && n_1=-(\nu+h)\cos\varphi\cos\alpha;\\ &m_2=(\rho+h)\cos\alpha\cos\beta; && n_2=(\rho+h)\sin\alpha;\\ &m_3=-\sin\beta; && n_3=0; \end{aligned}\qquad(29)$$

$$\overline{m}_1=(\overline{\nu}+\overline{h})\cos\overline{\varphi}\,[\sin\alpha\cos\beta\cos(\overline{\omega}-\omega)+\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi\sin(\overline{\omega}-\omega)+$$
$$+\sin\beta\cos\varphi\sin(\overline{\omega}-\omega)];$$

$$\overline{m}_2=(\overline{\rho}+\overline{h})\{-\sin\alpha\cos\beta\sin\overline{\varphi}\sin(\overline{\omega}-\omega)+\cos\alpha\cos\beta\,[\cos\varphi\cos\overline{\varphi}+$$
$$+\sin\varphi\sin\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)]-\sin\beta\,[\sin\varphi\cos\overline{\varphi}-\cos\varphi\sin\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)]\};$$

$$\overline{m}_3=\sin\alpha\cos\beta\cos\overline{\varphi}\sin(\overline{\omega}-\omega)+\cos\alpha\cos\beta\,[\cos\varphi\sin\overline{\varphi}-$$
$$-\sin\varphi\cos\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)]-\sin\beta\,[\sin\varphi\sin\overline{\varphi}+\cos\varphi\cos\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)];\qquad(30)$$

$$\overline{n}_1=(\overline{\nu}+\overline{h})\cos\overline{\varphi}\,[-\cos\alpha\cos(\overline{\omega}-\omega)+\sin\alpha\sin\varphi\sin(\overline{\omega}-\omega)];$$

$$\overline{n}_2=(\overline{\rho}+\overline{h})\{\cos\alpha\sin\varphi\sin(\overline{\omega}-\omega)+\sin\alpha\,[\cos\varphi\cos\overline{\varphi}+$$
$$+\sin\varphi\sin\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)]\};$$

$$\overline{n}_3=-\cos\alpha\cos\overline{\varphi}\sin(\overline{\omega}-\omega)+\sin\alpha\,[\cos\varphi\sin\overline{\varphi}-\sin\varphi\cos\overline{\varphi}\cos(\overline{\omega}-\omega)].$$

Теперь выражение (27) примет вид:

$$sd\mathbf{l}=(\overline{m}_1d\overline{\omega}+\overline{m}_2d\overline{\varphi}+\overline{m}_3d\overline{h}-m_1d\omega-m_2d\varphi-m_3dh)\,\mathbf{m}+$$
$$+(\overline{n}_1d\overline{\omega}+\overline{n}_2d\overline{\varphi}+\overline{n}_3d\overline{h}-n_1d\omega-n_2d\varphi-n_3dh)\,\mathbf{n}.\qquad(31)$$

Наконец, исключив $d\mathbf{l}$ из выражений (31) и (15), получим

$$sd\beta=\overline{m}_1d\overline{\omega}+\overline{m}_2d\overline{\varphi}+\overline{m}_3d\overline{h}-m_1d\omega-m_2d\varphi-m_3dh-$$
$$-s\cos\varphi\sin\alpha\,d\omega-s\cos\alpha d\varphi;\qquad(32)$$

$$s\sin\beta d\alpha=-\overline{n}_1d\overline{\omega}-\overline{n}_2d\overline{\varphi}-\overline{n}_3d\overline{h}+n_1d\omega+n_2d\varphi+n_3dh+$$
$$+s(\sin\varphi\sin\beta-\cos\varphi\cos\alpha\cos\beta)\,d\omega+s\sin\alpha\cos\beta d\varphi.\qquad(33)$$

Формулы (32) и (33) выражают изменения зенитного расстояния и азимута прямой линии в зависимости от изменения геодезических координат ее конечных точек.

Заметим, что должно выполняться соотношение

$$\frac{(\overline{m}_1)^2}{(\overline{\nu}+\overline{h})^2\cos^2\overline{\varphi}}+\frac{(\overline{m}_2)^2}{(\overline{\rho}+\overline{h})^2}+(\overline{m}_3)^2=1$$

и подобные соотношения для величин m_i, $\overline{n}_i$, n_i.

8. **Уравнивание триангуляции.** Для составления уравнений погрешностей исходим из приближенных геодезических координат ω, φ, h пунктов, вычисленных, как указано выше. Эти координаты используем для точного вычисления s, α, β, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ для каждого направления. Заметим еще раз, что $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ относятся к направлению, продолженному через

конечную точку, а не представляют собой обратный азимут и обратное зенитное расстояние. Теперь можно вычислить коэффициенты уравнений (32) и (33). Эти уравнения выражают изменения α и β в зависимости от неизвестных поправок $d\bar{\omega}$, $d\bar{\varphi}$, $d\bar{h}$, $d\omega$, $d\varphi$, dh, которыми должны быть исправлены первоначальные, приближенные координаты. Чтобы получить уравнения для обратных направлений, следует взять $180°+\bar{\alpha}$ и $180°-\bar{\beta}$ за начальные (неотчеркнутые) α и β и $180°+\alpha$, $180°-\beta$ за конечные (отчеркнутые) $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, тогда формулы (32), (33) и др. для вычисления коэффициентов $\bar{m}_i$, m_i, $\bar{n}_i$, n_i останутся в точности теми же самыми.

Величины $d\beta$ и $d\alpha$ в левых частях уравнений (32) и (33) следует рассматривать как разности соответственно геодезических зенитных расстояний и геодезических азимутов в смысле: наблюденное значение минус вычисленное. На практике мы получаем из наблюдений астрономические зенитные расстояния и азимуты, которые связаны с отвесными линиями, а не с нормалями к референц-эллипсоиду. Поэтому для перехода к астрономической системе, то есть к разностям между действительно наблюдаемыми (астрономическими) β и α и вычисленными (геодезическими), следует в правые части уравнений ввести величины $\delta\beta$ и $\delta\alpha$, умноженные соответственно на s и $s \sin\beta$. Эти величины определяются формулами (10), в которых под $\delta\omega$ и $\delta\varphi$ нужно понимать разности астрономических и геодезических координат пункта, где установлен инструмент.

Если на пункте астрономический азимут не измерялся, то к измеренному горизонтальному направлению мы должны добавить поправку станции $\Delta\alpha$ (поправку за ориентирование на станции нулевого направления) или же вычесть ее из вычисленного азимута. Для приведения измеренного зенитного расстояния к направлению прямой, соединяющей пункты наблюдения, следует добавить к измеренному β угол рефракции $\Delta\beta$ или же вычесть этот угол из вычисленного зенитного расстояния.

Теперь, обозначив через $\alpha^{\text{набл.}}$ и $\alpha^{\text{выч.}}$ соответственно измеренное горизонтальное направление и вычисленный азимут, а через $\beta^{\text{набл.}}$ и $\beta^{\text{выч.}}$ измеренное и вычисленное зенитное расстояние, получим на основании выражений (32) и (33) и только что сделанных замечаний два следующих уравнения для каждого наблюденного на пункте направления

$$\beta^{\text{набл.}}-\beta^{\text{выч.}}=-\Delta\beta+\frac{\bar{m}_1}{s}d\bar{\omega}+\frac{\bar{m}_2}{s}d\bar{\varphi}+\frac{\bar{m}_3}{s}d\bar{h}-\frac{m_1}{s}d\omega-$$

$$-\frac{m_2}{s}d\varphi-\frac{m_3}{s}dh-(d\omega+\delta\omega)\cos\varphi\sin\alpha-(d\varphi+\delta\varphi)\cos\alpha, \qquad (34)$$

$$\alpha^{\text{набл.}}-\alpha^{\text{выч.}}=-\Delta\alpha-\frac{\bar{n}_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{\omega}-\frac{\bar{n}_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{\varphi}-\frac{\bar{n}_3}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{h}+$$

$$+\frac{n_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\omega+\frac{n_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\varphi+$$

$$+(d\omega+\delta\omega)(\sin\varphi-\cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi)+(d\varphi+\delta\varphi)\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (35)$$

Уравнения (34) и (35) являются искомыми уравнениями погрешностей. Очевидно, что $d\omega+\delta\omega$ есть разность между астрономической и начальной (приближенной) геодезической долготой. Эта разность известна, если на пункте измерялась астрономическая долгота, рассматриваемая как безошибочная. Если же долгота не измерялась, то величину $d\omega+\delta\omega$ нужно рассматривать наряду с $d\omega$ как отдельное независимое неизвестное. Величина $\delta\omega$ определится позднее из выражения

$$\delta\omega=(d\omega+\delta\omega)-d\omega.$$

То же относится и к $d\varphi+\delta\varphi$.

Работы по исследованию атмосферной рефракции не привели пока к уверенности, что последняя может быть точно оценена по физическим данным. В то же время нельзя рассматривать величину $\Delta\beta$ как неизвестную на обоих концах каждой из линий, так как тогда число неизвестных во всей совокупности уравнений будет больше числа измерений. Следовательно, необходимы те или иные допущения.

В настоящее время имеются две главные возможности использования уравнений зенитных расстояний. Одна возможность заключается в предположении, что по всем линиям, выходящим из рассматриваемого пункта, рефракционное искажение, приходящееся на единицу расстояния имеет одну и ту же величину. Рассматривая это искажение как одно неизвестное, можно выразить через него все $\Delta\beta$ на данном пункте. Этот прием характерен для тех пунктов, где все вертикальные углы измерялись совместно, даже если отдельные полные приемы измерений выполнялись в разное время. В основе второй возможности лежит предположение, что величина $\Delta\beta$ одна и та же на двух концах линии. В этом случае неизвестные $\Delta\beta$ могут быть исключены путем образования попарных разностей уравнений зенитных расстояний. Этот прием типичен для пунктов, где выполнялись взаимно обратные наблюдения.

В заключение несколько более подробно, чем это делает Хотин, остановимся на различных видах уравнений погрешностей, возникающих в сети пространственной триангуляции, причем будем иметь в виду наиболее общий случай, когда астрономические определения на пунктах получают поправки из уравнивания и в сети, кроме выходной стороны в исходном пункте, измерены и другие стороны треугольников.

Пусть φ^*_0, ω^*_0 и α^*_0 — измеренные значения соответственно астрономической широты, долготы и азимута, s — измеренная длина стороны, s_0 — приближенная, соответствующая приближенным (начальным) геодезическим координатам. Независимыми неизвестными для каждого пункта являются геодезические координаты ω, φ, h, а также астрономическая широта φ^* и астрономическая долгота ω^*. Две последние величины определяют направление отвесной линии или вертикальной оси инструмента, устанавливаемой с помощью спиртового уровня. Примем, что

$$\varphi^*=\varphi^*_0+\delta\varphi^*_0,$$

$$\omega^*=\omega^*_0+\delta\omega^*_0,$$

где $\delta\varphi^*_0$ и $\delta\omega^*_0$ — поправки астрономических широт и долгот, определяемые из уравнивания.

Если азимут получен из астрономических наблюдений, то в уравнении (35) мы должны принять

$$\alpha^{\text{набл.}}+\Delta\alpha=\alpha^*_0.$$

Величины $\delta\omega$, $\delta\varphi$ в уравнениях (34) и (35) есть разности между астрономическими и вероятнейшими геодезическими координатами пункта. Поскольку нам известны из наблюдений приближенные астрономические координаты φ_0^*, ω_0^* и из уравнивания нужно найти их поправки $\delta\varphi^*$, $\delta\omega_0^*$, то в указанных уравнениях вместо $d\omega+\delta\varphi$ и $d\varphi+\delta\varphi$ мы должны написать $d\omega+\delta\omega+\delta\omega_0^*$ и $d\varphi+\delta\varphi+\delta\varphi_0^*$, причем под $\delta\omega$ и $\delta\varphi$ следует понимать уже разность между приближенными астрономическими и вероятнейшими геодезическими координатами. Члены, содержащие $d\omega+\delta\omega$ и $d\varphi+\delta\varphi$, будут известны и их нужно отнести к свободным членам уравнений.

Теперь уравнения погрешностей, которые могут иметь место на любом пункте триангуляции, примут следующий вид:

a) для горизонтальных направлений

$$v_\alpha = -\Delta\alpha - \frac{\overline{n}_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\overline{\omega} - \frac{\overline{n}_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\overline{\varphi} - \frac{\overline{n}_3}{s}\operatorname{cosec}\beta d\overline{h} +$$
$$+\frac{n_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\omega + \frac{n_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\varphi + (\sin\varphi - \cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi)\delta\omega_0^* +$$
$$+\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta\delta\varphi_0^* + \{[\alpha^{\text{выч.}} + (d\omega+\delta\omega)(\sin\varphi - \cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi) +$$
$$+(d\varphi+\delta\varphi)\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta] - \alpha^{\text{набл.}}\}, \tag{36}$$

b) для зенитных расстояний

$$v_\beta = -\Delta\beta + \frac{\overline{m}_1}{s}d\overline{\omega} + \frac{\overline{m}_2}{s}d\overline{\varphi} + \frac{\overline{m}_3}{s}d\overline{h} - \frac{m_1}{s}d\omega - \frac{m_2}{s}d\varphi -$$
$$-\frac{m_3}{s}dh - \cos\varphi\sin\alpha\delta\omega_0^* - \cos\alpha\delta\varphi_0^* +$$
$$+\{[\beta^{\text{выч.}} - (d\omega+\delta\omega)\cos\varphi\sin\alpha - (d\varphi+\delta\varphi)\cos\alpha] - \beta^{\text{набл.}}\}, \tag{37}$$

c) для длин линий

$$v_s = (\nu+h)\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta(d\overline{\omega} - d\omega) + (\overline{\rho}+\overline{h})\cos\overline{\alpha}\sin\overline{\beta}d\overline{\varphi} -$$
$$-(\rho+h)\cos\alpha\sin\beta d\varphi + \cos\overline{\beta}d\overline{h} - \cos\beta dh + (s_0 - s), \tag{38}$$

d) для астрономических азимутов

$$v_\alpha^* = -\frac{\overline{n}_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\overline{\omega} - \frac{\overline{n}_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\overline{\varphi} - \frac{\overline{n}_3}{s}\operatorname{cosec}\beta dh + \frac{n_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\omega +$$
$$+\frac{n_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\varphi + (\sin\varphi - \cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi)\delta\omega_0^* + \sin\alpha\operatorname{ctg}\beta\delta\varphi_0^* +$$
$$+\{[\alpha^{\text{выч.}} + (d\omega+\delta\omega)(\sin\varphi - \cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi) + (d\varphi+\delta\varphi)\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta] - \alpha_0^*\}, \tag{39}$$

e) для астрономических широт

$$v_\varphi = \delta\varphi_0^*, \tag{40}$$

f) для астрономических долгот

$$v_\omega = \delta\omega_0^*. \tag{41}$$

Величинами v с индексами обозначены погрешности соответствующих уравнений. В уравнениях, составленных для исходного пункта нужно положить $d\omega = d\varphi = dh = 0$.

Если астрономические измерения считаются безошибочными, то $\delta\omega_0^* = \delta\varphi_0^* = v_\alpha^* = 0$ и азимутальные уравнения погрешностей превращаются в условные уравнения вида

$$-\frac{\bar{n}_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{\omega} - \frac{\bar{n}_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{\varphi} - \frac{\bar{n}_3}{s}\operatorname{cosec}\beta d\bar{h} + \frac{n_1}{s}\operatorname{cosec}\beta d\omega +$$

$$+ \frac{n_2}{s}\operatorname{cosec}\beta d\varphi + \{[\alpha^{\text{выч.}} + (d\omega + \delta\omega)(\sin\varphi - \cos\alpha\operatorname{ctg}\beta\cos\varphi) +$$

$$+ (d\varphi + \delta\varphi)\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta] - \alpha^*\} = 0.$$

Если безошибочны длины линий, то возникают условные уравнения вида

$$(\nu + h)\cos\varphi\sin\alpha\sin\beta(d\bar{\omega} - d\omega) + (\bar{\rho} + \bar{h})\cos\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}d\bar{\varphi} -$$

$$-(\rho + h)\cos\alpha\sin\beta d\varphi + \cos\bar{\beta}d\bar{h} - \cos\beta dh + (s_0 - s) = 0.$$

И те и другие уравнения необходимо включить в уравнивание.

Для пунктов, где астрономические измерения не выполнялись, в уравнениях (36), (37) нужно принять $\delta\omega_0^* = \delta\varphi_0^* = 0$, а величины $d\omega + \delta\omega$ и $d\varphi + \delta\varphi$ следует рассматривать наряду с $d\omega$ и $d\varphi$ как отдельные независимые неизвестные. Как уже было отмечено выше, величины $\delta\omega$ и $\delta\varphi$ или разности между астрономическими и вероятнейшими геодезическими координатами будут найдены позднее из выражений

$$\delta\omega = (d\omega + \delta\omega) - d\omega;$$

$$\delta\varphi = (d\varphi + \delta\varphi) - d\varphi.$$

Решение системы уравнений выполняется по известным правилам с учетом весов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молоденский М. С. Изучение фигуры Земли геометрическим (астрономогеодезическим) методом. Сборник ГУГК, вып. 27, 1949.
2. Bruns H. Die Figur der Erde. Berlin, 1878.
3. Hotine M. Adjustment of Triangulation in Space. München, 1956.
4. Hotine. A Primer of Non-classical Geodesy. London, 1959.

Работа поступила
6 октября 1965 г.