Благодаря разделению полного вектора сейсмических воздействий на компоненты, соответствующие определенному типу волн, знанию их величины и ориентации в пространстве, появляется возможность при расчете сооружений на прочность снизить стоимость проекта, выбирая наиболее безопасную ориентацию сооружений и их отдельных конструкций.

Описанный алгоритм реализован в вычислительных программах на ЭВМ ЕС-1020. Полученные с его помощью расчетные акселерограммы используются как исходный материал для расчета напряжений, вызываемых в различных сечениях сооружений, отдельных узлах и блоках.

1. *Берзон И. С., Пасечник И. П.* Строение Земли по динамическим характеристикам сейсмических волн. М., 1976. 2. *Гуревич Г. И.* Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. М., 1974. 3. *Капитанова С. А., Яновская Т. Е.* Поглощение поверхностных волн и добротность коры и верхней мантии в районе Карпат // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 10. С. 78—82. 4. *Коган С. Я.* Сейсмическая энергия и методы ее определения. М., 1975. 5. *Лоссовский Е. К.* К вопросу о дисперсии фазовой скорости объемных сейсмических волн в поглощающей среде // Геофиз. журн. 1981. Т. 3. № 3. С. 33—39. 6. *Напетваридзе Ш. Г.* Требования, предъявляемые к методике сейсмического микрорайонирования новой редакцией норм сейсмического строительства // Сейсмическое микрорайонирование. Кишинев, 1979. С. 142—147. 7. *Ратникова Л. И.* Методы расчета сейсмических волн в тонкослоистых средах. М., 1973. 8. Справочник физических констант горных пород / Под ред. С. Кларка. М., 1969. 9. Строительные нормы и правила. Строительство в сейсмических районах. — II—7—81. М., 1982. 10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1979. 11. *Anderson D. L., Hart R.* S. Q of the Earth // J. of Geophys. Res. 1978. V. 83. № B 12. P. 5869—5882. 12. *Futterman W. I.* Dispersive body waves // J. Geophys. Res. 1962. V. 67. N 13. P. 5279—5291. 13. *Jeffreys H., Bullen K. E.* Seismological Tables // Brit. Assoc. Adv. Sci. 1940. N 48. P. 468.

Статья поступила в редколлегию 23.04.86

УДК 528.1

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

РЕКУРРЕНТНОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В [3] рассмотрен рекуррентный коррелатный способ уравнивания, суть которого сводится к тому, что в геодезической сети по необходимым измерениям вычисляется вектор X_0 порядка m предварительных координат пунктов и строится соответствующая ему матрица весовых коэффициентов Q_0. Способ построения Q_0 указан в [2, 3], причем он рассмотрен с учетом зависимости ошибок координат исходных пунктов. Справедливость этого вывода подтверждена Ю. И. Маркузе [7] на основе параметрического способа уравнивания.

Все остальные измерения в сети, число которых равно r, избыточные и процесс уравнивания выполняется по формулам:

$$a_i\delta X_i - v_i + w_i = 0; \quad (1)$$

$$w_i = \tilde{l}_i - l_i; \quad (2)$$

$$R_i = p_i^{-1} + a_i Q_{i-1} a_i^T; \quad (3)$$

$$k_i = -R_i^{-1} w_i; \quad (4)$$

$$\delta X_i = Q_{i-1} a_i^T k_i; \quad (5)$$

$$X_i = X_{i-1} + \delta X_i; \quad (6)$$

$$Q_i = Q_{i-1} - R_i^{-1}(a_i Q_{i-1})^T (a_i Q_{i-1}), \quad (7)$$

где $i=1, 2, \ldots, r$. На последнем шаге получают вектор уравненных координат $\bar{X}=X_r$ и соответствующую ему матрицу весовых коэффициентов $Q_{\bar{X}}=Q_r$.

В формулах (1)—(7) a_i — строка коэффициентов i-го условного уравнения, тождественно совпадающая со строкой коэффициентов обычного уравнения поправок параметрического способа уравнивания; δX_i — вектор поправок в координаты за решение i-го уравнения; v_i и p_i — поправка и вес измерения l_i; $\tilde{l}_i$ — вычисленное по вектору координат X_{i-1} значение избыточно измеряемой величины.

Рекуррентная формула (7) в настоящее время хорошо известна в геодезической литературе. Ранее ее использовали для оптимального проектирования Ю. М. Нейман [10] и З. П. Тамутис [11]. Алгоритмы уравнивания геодезических сетей, основанные на формуле (7) и параметрическом способе, стали широко разрабатываться после предложения Ю. И. Маркузе [8] использовать в качестве начальной матрицы

$$Q_0 = 10^q E, \quad (8)$$

где E — единичная матрица, а q — максимальное число, не превышающее числа разрядов в разрядной сетке ЭВМ. Тогда после преобразования по (7) для всех n измерений, а не только избыточных, на последнем шаге получаем матрицу Q_n.

В случае уравнивания несвободной сети матрица $Q_n \approx N^{-1} = Q_{\bar{X}}$. Для свободной сети матрица Q_n преобразуется в псевдообратную

$$N^+ = Q_{\bar{X}} \approx Q_{n+d} - B^T(BB^TBB^T)^{-1}B, \quad (9)$$

где B — известная матрица ограничений [4, 6] порядка $d\times m$; d — дефект сети, равный $d=m-\rho$; $\rho=\mathrm{rang}\, N$; $N=A^TPA$ — матрица коэффициентов системы нормальных уравнений параметрического способа уравнивания. Формирование матрицы $Q_{n+d} = (Q_n^{-1} + B^TB)^{-1}$ также можно выполнить [9] по формуле (7) последовательным введением строк b_j матрицы B, $j=1, 2, \ldots, d$. В случае необходимости матрицу B следует привести к центру тяжести сети и, по предложению Ю. И. Маркузе [6], соответствующим образом нормировать. Окончательное решение находим по формуле

$$\bar{X} \sim X_0 - N^+ L, \tag{10}$$

где $L = A^T P l$; l — вектор свободных членов уравнений поправок.

Коррелатный способ, описываемый формулами (1)—(7), работает и в этом случае, так как вектор предварительных координат X_0 с матрицей Q_0, определяемой формулой (8), можно считать как

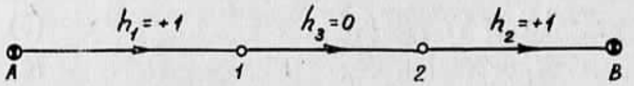

Рис. 1. Схема нивелирного хода.

измеренным с весами 10^{-q}, так и вектором исходных данных с матрицей весомых коэффициентов $Q_0 = 10^q E$. После работы формул (1)—(7) при $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. по всем измерениям, а не только избыточным, получим уравненный вектор $\bar{X} \approx X_n$ и матрицу $Q_{\bar{X}} \approx Q_n$. Для свободной сети следует выполнить дополнительное преобразование матрицы Q_n в псевдообратную по (9).

Отметим, что применение рекуррентного коррелатного уравнивания по формулам (1)—(8) предпочтительнее параметрического (7)—(10), так как при плохой обусловленности матрицы N решение (10) можно получить с большими ошибками, несмотря на то, что N^+ вычислена с заданной точностью надежно. В этом нетрудно убедиться, рассматривая численный пример уравнивания нивелирного хода (рис. 1), в котором веса измеренных превышений, показанных на схеме, равны $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 1000$. Отметки исходных пунктов $H_A = H_B = 0$. Для удобства, не нарушая общности, все размерности здесь и в дальнейшем опущены.

Так как коэффициенты и свободные члены уравнений поправок линейны относительно неизвестных, вектор предварительных высот определяемых пунктов можно положить любым, например, $H_0^T = (0;\ 8)$. Тогда, выполняя вычисления с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$, примем $Q_0 = 10^2 E$, и согласно формулам (7)—(10) имеем

$$Q_{\bar{H}} = Q_3 = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}50 & 0{,}50 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -8001 \\ 8009 \end{pmatrix},$$

$\delta H^T = (-4;\ -4)$, $\bar{H}^T = (-4;\ +4)$, т. е. полученный уравненный вектор $\bar{H}$ явно противоречит здравому смыслу.

При коррелатном уравнивании (1)—(8), полагая также $\varepsilon = 10^{-2}$, $H_0^T = (0;\ 8)$ и $Q_0 = 10^2 E$, получаем ту же матрицу $Q_{\bar{H}} = Q_3$ и уравненный вектор $\bar{H}^T = H_3^T = (0;\ 0)$, что вполне согласуется с результатами измерений.

Заметим, однако, что предложение полагать $Q_0 = 10^q E$, где $q \gg 0$, нельзя считать оптимальным, особенно при уравнивании свободных сетей, так как это вынуждает на первых шагах до набора необходимых измерений по (7) работать с очень плохо обусловленными матрицами, а это требует повышенной точности при вычислении и хранении элементов матриц Q_i. Не зря, например, в [9, с. 19] матрица Q_8 выписана с точностью до девяти значащих цифр, в то время как $Q_0 = 10^5 E$.

О плохой обусловленности свидетельствует уже первый шаг работы алгоритма, так как, например, $Q_1^{-1} = Q_0^{-1} + a_1^T p_1 a_1$, где $a_1^T p_1 a_1$ — матрица ранга 1 с одним ненулевым собственным значением $\lambda_1(a_1^T p_1 a_1) = p_1 a_1 a_1^T$. Поскольку Q_0 выбирается диагональ-

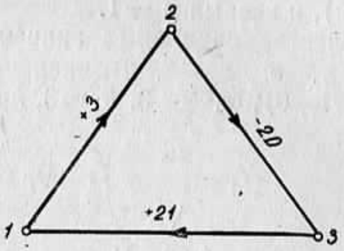

Рис. 2. Схема свободной нивелирной сети.

ной, то максимальное собственное значение $\lambda_1(Q_1^{-1}) = 10^{-q} + p_1 a_1 a_1^T$, а минимальное $\lambda_m(Q_1^{-1}) = 10^{-q}$. Тогда спектральное число обусловленности

$$k(Q_1) = k(Q_1^{-1}) = \frac{10^{-q} + p_1 a_1 a_1^T}{10^{-q}} = 1 + 10^q p_1 a_1 a_1^T,$$

т. е. при большом q число $k(Q_1)$ слишком велико.

Избавиться от плохой обусловленности можно, приняв $Q_0 = p_0^{-1} E$, где $p_0 \approx p_i a_i a_i^T$, но в этом случае преобразования по (1)—(7) следует продолжить для исключения фиктивных измерений, входящих в вектор $X_0^T = (X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0m})$, вводя для них отрицательные веса $-p_0$. Строкой коэффициентов a_i здесь будет строка a_{0i}, в которой на месте исключаемого фиктивного измерения X_{0i} стоит 1, а остальные коэффициенты — нули. Исключение вектора X_0 следует выполнить после получения матрицы $Q_{n+d} = (Q_n^{-1} + B^T B)^{-1}$. Подобный путь исключения фиктивных измерений с целью получения N^+ использован в [7], а для редукции N^+ к требуемой g-обратной матрице — в работе [4].

Таким образом, рекуррентный алгоритм уравнивания, основанный на коррелатном способе, можно свести к следующему.

1. Задание вектора X_0 и матрицы $Q_0 = p_0^{-1} E$.

2. Учет всех измерений по (1)—(7). В результате получим вектор X_n и матрицу $Q_n = (Q_0^{-1} + N)^{-1}$.

3. Вычисление по (7) матрицы $Q_{n+d} = (Q_0^{-1} + N + B^T B)^{-1}$.

4. Исключение по (1)—(7) вектора X_0 и матрицы Q_0. Для этого вектор «измерений» X_0 вводится с весовой матрицей $Q_0^{-1} = -p_0 E$. На выходе получим вектор уравненных неизвестных $\bar{X}$ и матрицу $Q_{n+d+m} = (N + B^T B)^{-1} = \bar{Q}$.

5. Вычисление матрицы

$$Q_{\bar{X}} = N^+ = \bar{Q} - B^T (B B^T B B^T)^{-1} B, \tag{11}$$

необходимой для оценки точности сети.

Пункты 3 и 5 изложенного алгоритма следует выполнять лишь при уравнивании свободных сетей с неполным рангом (теоретическим) матрицы весовых коэффициентов необходимых неизвестных.

Работу изложенного алгоритма проиллюстрируем на примере уравнивания свободной нивелирной сети (рис. 2) с равноточно измеренными превышениями, выписанными на схеме (размерности опущены), и весами $p_i=1$.

В качестве начальных значений положим: $H_0^T=(0\ \ 0\ \ 0)$; $Q_0=E$, т. е. $p_0=1$. Вычисления по (1)—(7) дают $a_1Q_0=(-1\ \ 1\ \ 0)$, $w_1=-3$, $R_1=3$, $k_1=1$,

$$H_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad Q_1=\begin{pmatrix}0{,}67&0{,}33&0\\0{,}33&0{,}67&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$a_2Q_1=(-0{,}33\ \ -0{,}67\ \ 1)$, $w_2=19$, $R_2=2{,}67$, $k_2=-7{,}116$,

$$H_2=\begin{pmatrix}1{,}348\\5{,}768\\-7{,}116\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}0{,}63&0{,}25&0{,}12\\0{,}25&0{,}50&0{,}25\\0{,}12&0{,}25&0{,}63\end{pmatrix},$$

$a_3Q_2=(0{,}51\ \ 0\ \ -0{,}51)$, $w_3=-12{,}54$, $R_3=2{,}02$, $k_3=6{,}208$,

$$H_3=\begin{pmatrix}4{,}514\\5{,}768\\-10{,}280\end{pmatrix},\quad Q_3=\begin{pmatrix}0{,}50&0{,}25&0{,}25\\0{,}25&0{,}50&0{,}25\\0{,}25&0{,}25&0{,}50\end{pmatrix}.$$

Матрица ограничений для свободной нивелирной сети $B=(1\ \ 1\ \ 1)$, $BQ_3=(1\ \ 1\ \ 1)$, $R=1+BQ_3B^T=4$,

$$Q_4=Q_3-R^{-1}(BQ_3)^T(BQ_3)=\begin{pmatrix}0{,}25&0{,}00&0{,}00\\0{,}00&0{,}25&0{,}00\\0{,}00&0{,}00&0{,}25\end{pmatrix}.$$

Сделаем вывод вектора $H_0^T=(H_{01},\ H_{02},\ H_{03})=(0\ \ 0\ \ 0)$ и матрицы $Q_0=E$. Матрица уравнений поправок A_0 вектора «измерений» H_0 единичная. Тогда

$$a_{01}Q_4=(0{,}25\ \ 0\ \ 0),\ w_{01}=H_{31}-H_{01}=4{,}514,$$

$$R_{01}=-p_0^{-1}+a_{01}Q_4a_{01}^T=-0{,}75,\ k_{01}=6{,}019,$$

$$H_5=\begin{pmatrix}6{,}019\\5{,}768\\-10{,}280\end{pmatrix},\quad Q_5=\begin{pmatrix}0{,}33&0&0\\0&0{,}25&0\\0&0&0{,}25\end{pmatrix}.$$

Аналогично выводим отметки H_{02} и H_{03}:

$$\bar H=\begin{pmatrix}6{,}019\\7{,}691\\-13{,}710\end{pmatrix},\quad Q_7=\begin{pmatrix}0{,}33&0&0\\0&0{,}33&0\\0&0&0{,}33\end{pmatrix}=\bar Q.$$

Окончательную матрицу весовых коэффициентов уравненных отметок пунктов получаем по формуле (11):

$$Q_{\bar H}=\begin{pmatrix}0{,}33&0&0\\0&0{,}33&0\\0&0&0{,}33\end{pmatrix}-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}22&-0{,}11&-0{,}11\\-0{,}11&0{,}22&-0{,}11\\-0{,}11&-0{,}11&0{,}22\end{pmatrix}.$$

Данный алгоритм без существенного увеличения объема вычислений позволяет получить и решение обычным параметрическим способом [8], так как здесь достаточно вычислить только вектор свободных членов $L^T=(18\ \ -23\ \ +41)$ и применить формулу (10). Тогда $\bar H^T=(5{,}94\ \ 7{,}59\ \ -13{,}53)$. Точное значение вектора $\bar H$, полученное с удержанием семи значащих цифр, составляет $\bar H^T=(6{,}000\,000;\ 7{,}666\,667;\ -13{,}666\,67)$. Сравнение полученных результатов показывает, что изложенный коррелатный способ при ограниченной точности вычисления и хранения матриц Q_i дает результаты более близкие к истинным, чем параметрический. Промежуточные результаты счета и хранение отдельных векторов и скаляров, как это нетрудно предусмотреть на современных ЭВМ, выполнены с удвоенной точностью. При уравнивании больших сетей проблемой, как известно, является именно хранение и вычисление матрицы $Q_{\bar X}$ и (или) N.

Особо отметим, что в рассмотренных примерах вычисление и хранение матрицы Q_i ведется с точностью лишь $\varepsilon=10^{-2}$ с той целью, чтобы упростить вычисления и показать, к каким пагубным последствиям может привести игнорирование влияния ошибок округлений в неустойчивых к ним алгоритмах уравнивания. В частности, если в нивелирной сети на рис. 2 положить $Q_0=10^2E$ и использовать алгоритм (7)—(10), то при заданных ограничениях на точность вычислений не будет удовлетворительно получен не только вектор $\bar H$, но и матрица $Q_{\bar H}$.

Объем вычислений, сложность программирования и требуемые запросы к памяти ЭВМ в рассмотренных здесь алгоритмах практически одинаковы. Изложенный коррелатный способ наиболее целесообразно использовать с целью сокращения объема вычислений в сочетании с идеей последовательного уравнивания [5], когда к уже уравненному участку сети присоединяется по одному новому определяемому пункту [1, 7].

В заключение подчеркнем, что полученный в [3] рекуррентный алгоритм (1)—(7), основанный на коррелатном уравнивании и теории уравнивания зависимых измерений [5], с небольшими видоизменениями по сути представляет собой знаменитый фильтр Калмана, который, благодаря целой серии выполненных и опубликованных В. К. Панкрушиным и его учениками работ, посвященных исследованию современных движений земной коры и объектов искусственного происхождения, в настоящее время хорошо известен в геодезической литературе.

1. *Герасименко М. Д.* К вопросу о последовательном уравнивании геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1979. № 4. С. 19—23.
2. *Герасименко М. Д.* Метод непосредственного уравнивания координат геоде-

2—4260

зических построений способом условий и учет ошибок зависимых исходных данных. Владивосток, 1975. С. 8. Рукопись деп. ВИНИТИ № 3707-75 деп. 3. *Герасименко М. Д.* Многогрупповой коррелатный способ для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1977. № 5. С. 57—60. 4. *Герасименко М. Д., Шароглазова Г. А.* Определение современных движений земной коры из повторных измерений // Геодезия и картография. 1985. № 7. С. 25—29. 5. *Гордеев Ю. А.* О применении принципа наименьших квадратов при уравнивании зависимых результатов измерений // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1960. № 2. С. 19—40. 6. *Маркузе Ю. И.* Взаимосвязь процедур уравнивания свободных и несвободных геодезических сетей // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. № 3. С. 3—14. 7. *Маркузе Ю. И.* Способы формирования исходной матрицы при рекуррентном уравнивании // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 5. С. 18—27. 8. *Маркузе Ю. И.* Уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей. М., 1982. 9. *Маркузе Ю. И., Хоанг Нгок Ха.* Два способа получения псевдообратной матрицы при уравнивании свободных геодезических сетей с применением рекуррентной формулы // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 1. С. 14—23. 10. *Нейман Ю. М.* Алгоритм проектирования геодезических построений на ЭВМ // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 6. С. 33—45. 11. *Тамутис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., 1979.

Статья поступила в редколлегию 12. 03. 86

УДК 528.482

Ю. П. ДЕЙНЕКА, Н. Ф. ШАПИРО

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПЛОТИНЫ ДОБРОТВОРСКОГО ВОДОХРАНИЛИЩА

С 1984 г. возобновлены геодезические наблюдения за состоянием водосливной плотины Добротворского водохранилища во Львовской области. Это было вызвано тем, что со стороны верхнего бьефа водохранилища в бетонной обшивке плотины раскрылись температурно-осадочные швы, а между первым и вторым блоками произошел скол части бетона.

За полгода до начала наблюдений в районе плотины создано планово-высотное геодезическое обоснование (см. рисунок), единое для наблюдения за горизонтальными смещениями и осадками марок в теле плотины [2, 5].

В каждом бетонном блоке плотины заложены контрольные марки 1, 2, ... 8, горизонтальные смещения которых определяли створным методом. Первый створ задавали с помощью теодолита ОТ-02 визированием с п. Iа на п. I, а второй — визированием с п. IIа на п. II. На продолжении первого створа наблюдались отклонения марок 1, ... 4, а на продолжении второго — марок 5, ... 8. Такая схема створных измерений была выбрана потому, что задать единый створ по всей плотине между пунктами I и II не было возможности из-за отсутствия прямой видимости между этими пунктами. При этом предусматривалось принудительное центрирование на пунктах Iа и IIа теодолита ОТ-02, а на марках 1, 2 ... 8 специально сконструированной неподвижной марки, отсчитывание по которой производилось с точностью 0,5 мм. Наконец, методика работ учитывала [2] возможные смещения пунктов, задающих створы Iа — I и IIа — II. Для этого перед каждым циклом створных измерений плановое положение этих пунктов определяли путем измерения всех углов и линий в треугольниках, включающих соответственно опорные III, IV и V, VI, а также створные IIа, II и Iа, I пункты (см. рисунок).

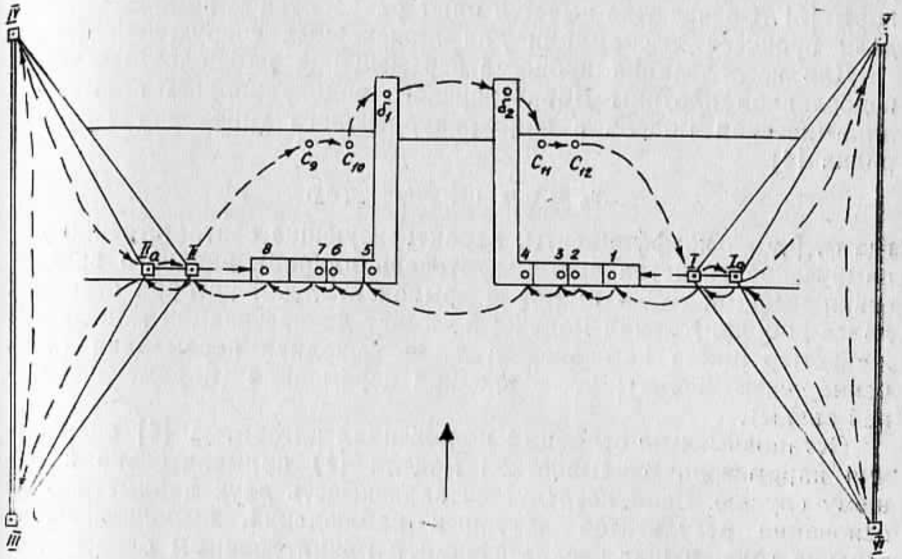

Схема планово-высотного обоснования в районе плотины водохранилища: III — VI — опорные пункты обоснования, I, Iа и II, IIа — створные пункты, 1, 2, ... 8 — контрольные марки, $c_9, \ldots c_{12}$, δ_1, δ_2 — осадочные марки.

При определении осадок водосливной плотины периодически наблюдалось высотное положение марок 1, 2, ... 8, заложенных в бетонной части плотины со стороны верхнего бьефа, марок δ_1 и δ_2, заложенных на крайних бетонных быках плотины со стороны нижнего бьефа, а также марок $c_9, \ldots, c_{12}$, заложенных в земляной плотине со стороны этого же бьефа. Таким образом, в качестве осадочных марок использовано 14 точек, которые в каждом цикле наблюдений включали в исходную нивелирную сеть, состоящую из пяти полигонов (см. рисунок), причем за начало условной системы принимали пункт IV. Измерение превышений между всеми точками сети выполняли высокоточным геометрическим нивелированием короткими лучами по программе II класса [2].

Результаты геодезических наблюдений о перемещениях точек сооружения наиболее полно и точно характеризуют взаимодействие его с основанием и внешней средой. Степень влияния различных факторов на перемещения можно определить с помощью корреляционно-регрессивных моделей [1], которые, однако, не