

на точность определяемого пункта. Так, при равных углах засечки но разных длинах сторон S_1 и S_2 значения $M_{\text{средн}}$ равны (см. табл., графы 32, 34). Точность также мало зависит от угла засечки в интервале $30 \dots 150^\circ$. Так, при равенстве других параметров, но разных углах засечки, значения $M_{\text{средн}}$ практически равны между собой (см. табл., графы 12, 34).

Анализ результатов, приведенных в таблице, показывает, что точность положения пункта существенно зависит от длины наибольшей стороны, а также от соотношения длины этой стороны к длине соседней. Так, при равных углах засечки, но существенно раз-
(см. табл., графы 12, 13).

Если наибольшая сторона превышает 4 км, то предвычислен-
ная точность положения определяемого пункта практически при-
любых углах засечки не удовлетворяет требованиям триангуля-
ции I разряда (см. табл., графы 24, 26, 33). По мере приближения
определяемого пункта к исходным, точность его существенно по-
вышается. В сетях, обозначенных знаком «*», погрешности поло-
жения пунктов не превышают допусков, установленных для сетей
триангуляции I разряда [1].

Таким образом, для привязки пунктов обратной однократной
пирокоспической засечкой с точностью, удовлетворяющей триангу-
ляции I разряда, необходимо выполнение следующих условий:
пределенная ошибка дирекционного угла $\leq 5''$;
наименьший угол при определяемом пункте $\leq 30^\circ$;
максимальная длина стороны до исходного пункта 4 км.

Отношение наибольшей стороны до исходного пункта к исход-
ной стороне $\leq 1,2$.

1. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. — М.: Недра, 1973. — 176 с. 2. Кузьмин Б. С., Липинков Б. А. Руководство по геодезии: (Общие сведения и триангуляция). — М.: ВИА, 1961. — 722 с.

Статья поступила в редакцию 20. 05. 85

УДК 528.44

Р. Г. ПИЛИПКО, Е. Ю. ИЛЬКИН
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
РЕПЕРОВ ВЫСОТНОЙ ОСНОВЫ
МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Обеспечение надежной эксплуатации сложных инженерных сооружений невозможно без достоверного установления их деформационных характеристик. Поэтому проблема надежного определения устойчивости реперов, составляющих высотную определительную деформации, несомненно актуальна.

В настоящее время геодезическая практика располагает значительным числом методов исследований, однако, как показано в [1, 3], достоверные результаты исследований достигаются лишь в частных случаях. Причиной является вырожденность матрицы нормальных уравнений, что приводит к множеству решений, удовлетворяющих исходную систему уравнений. Наиболее целесообразно решить эту проблему путем использования псевдообратной матрицы по методике, предложенной в [2]. Решение, получаемое по той методике.

$$H^0 = (A^T P A)^{-1} A^T P h, \quad (1)$$

обладает минимальной дисперсией и, по мнению автора [2], позволяет установить стабильность реперов.

В (1) H^0 — вектор искомым вертикальных смещений реперов; h — вектор разностей превышений, измеренных в исследуемых пунктах; P — матрица весов разностей измеренных превышений; A — матрица коэффициентов уравнений поправок. Оценку устойчивости выполняют по критерию

$$|H_{ii}^0| < m_i, \text{ где } m_i = 2n \sqrt{b_{ii}}, \quad (2)$$

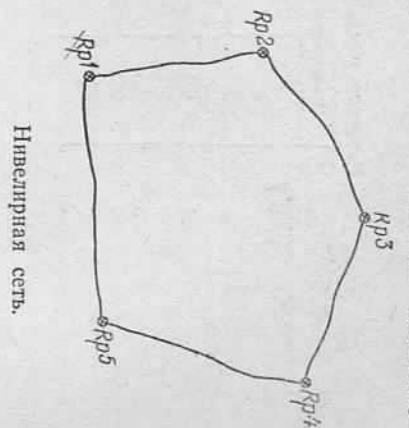
где b_{ii} — диагональные элементы корреляционной матрицы вектора H^0 i -го репера; n — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Анализ (1) показывает, что смещения H^0 определяются относительно горизонтальной плоскости отсчета, соответствующей псевдообратной матрице $V^+ = (A^T P A)^{-1}$ и расположенной на уровне средней отметки всех реперов сети. Таким образом, пространственное положение плоскости отсчета зависит от осадок каждого репера сети. Если допустить, что сеть состоит в основном из стабильных реперов, а смещения подвержены только отдельные из них, то смещение всех реперов H^0 , вычисленные от плоскости отсчета, определяемой псевдообратной матрицей V^+ , будут искажены. Это положение является существенным недостатком данной методики и может привести к ошибочным выводам при исследовании стабильности реперов и, соответственно, к неверному определению деформаций инженерных сооружений.

Для подтверждения сказанного выше рассмотрим нивелирную сеть, представленную на рисунке.

Разности h превышений, измеренных в двух смежных пунктах наблюдений, приведены в табл. 1, причем через h_0 обозначены исходные значения.

Зададим реперам $Rp3$ и $Rp5$ смещение $s_3 = s_5 = +2$ мм.



Соответствующая этому смещению разность h обозначена в табл. 1 через h_i .

Решение, выложенное по формуле (1), определяет вектор вертикальных смещений реперов H^0 (табл. 2, графы 1 и 2).

Так как диагональные элементы b_{ii} матрицы B^+ — обратные веса определяемых смещений и в нашем примере равны 0,4, то,

Таблица 1
Разности измеренных превышений

Номер репера	Разности измеренных превышений, мм			
	h_0	h_1	h_2	h_3
1	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4
2	-0,1	+1,9	+4,9	+4,9
3	+0,5	-1,5	-4,5	-4,5
4	-0,6	+1,4	+4,4	+5,6
5	0,0	-2,0	-5,0	+5,0
1				

Таблица 2
Вертикальные смещения реперов и допустимые средние квадратические ошибки их определения, $s_3=s_5=+2$ мм

Номер графы	Смещение реперов и оценки их стандартности, мм	Репер				
		1	2	3	4	5
1	H^0	-1,1	-0,7	+1,2	-0,4	+1,0
2	$m_{\text{веред}} H^0$	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
3	$m_{\text{веред}}$	—	—	+1,7	—	—
4	H^0	—	—	1,4	—	—
5	$m_{\text{веред}} H^0$	-0,8	-0,4	—	0,0	+1,2
6	$m_{\text{веред}}$	1,1	1,3	—	1,3	1,1
7	H^0	—	—	+1,7	—	+1,7
8	$m_{\text{веред}}$	—	—	1,4	—	1,4
9	H^0	-0,3	0,0	—	+0,3	—
10	$m_{\text{веред}} H^0$	1,3	1,3	—	1,5	—
11	H^0	-0,5	—	+1,7	—	+1,5
12	$m_{\text{веред}} H^0$	1,4	—	1,4	—	2,0
13	H^0	-0,4	—	+1,9	+0,3	+1,7
14	$m_{\text{веред}} H^0$	1,8	—	1,8	2,2	2,2

приняв среднюю квадратическую ошибку единицы веса $\mu=1$ и задавшись доверительной вероятностью 0,95, по формуле (2), найдем допустимую среднюю квадратическую ошибку определяемого смещения $m_{\text{веред}}=1,3$ мм.

По (2) устанавливаем, что все репера сети сохранили стабильность, и заданное смещение реперов этой методикой обнаружит

не удаюсь. Аналогичные результаты получены и при моделировании с другими, наперед заданными осадками.

Исследование устойчивости реперов высотной основы предлагаем выполнить, используя методику последовательных приближений, которую можно описать в следующем.

Получив по методике, основанной на формулах (1) и (2), смещения всех реперов и их оценки, определяем для них коэффициенты устойчивости реперов по формуле

$$K_i = \frac{m_{i, \text{веред}}}{H_i^0} \quad (3)$$

Репер, для которого коэффициент K минимален, проверяют на устойчивость при условии стабильности остальных $(n-1)$ реперов.

Для этого составляют систему уравнений поправок следующего вида

$$AH^0 + l = v \quad (4)$$

Матрицы A, l, v уравнения (4) состоят из подматриц соответственно A' и A'', l' и l'', v' и v'' . В развернутом виде (4) запишем так:

$$\begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix} H_0 + \begin{pmatrix} l' \\ l'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} \quad (5)$$

Матрицы A', l' и v' характеризуют условие стабильности системы из $(n-1)$ реперов, сети и их вид легко определить из системы $(n-1)$ -го линейного уравнения поправки, записанного для данной сети. В случае неустойчивого репера с номером i имеем

$$\begin{aligned} H_i^0 - 0 &= v'_i, \\ H_1^0 - 0 &= v'_2, \\ &\dots \\ H_{i-1}^0 - 0 &= v'_{i-1} \\ H_{i+1}^0 - 0 &= v'_{i+1} \\ &\dots \\ H_n^0 - 0 &= v'_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) получим

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_{i-1} \\ v'_{i+1} \\ \dots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

Матрица A'' равна исходной матрице коэффициентов уравнений поправок A , вектор l'' равен вектору разностей превышений h . При введении в уравнение весов диагональным элементом R_{ii} матрицы r' следует задавать значения на несколько порядков выше значений элементов R_{ii} матрицы r .

Решая (4) при условии $[v^T r' v] = \min$, получаем

$$B N^0 = W, \quad (7)$$

где $B = A^T P A$; $W = A^T P l$.

Из (7) имеем

$$N^0 = B^{-1} W. \quad (8)$$

Так как $\det B \neq 0$, то (8) однозначно определяет вектор вертикальных смещений реперов относительно новой плоскости отсчета, определенной по отметкам реперов, которые в данном приближении принимаются за устойчивые.

Выполнив оценку устойчивости реперов по (2), получим данные для последующего анализа стабильности реперной основы. В случае неустойчивости i -го репера из дальнейших вычислений его исключают. Затем по (1) и (2) с помощью критерия (3) из оставшихся $(n-1)$ реперов определяем репер, который необходимо проверить на устойчивость при условии стабильности остальных пунктов. Проверку проводят по формулам (8) и (2). Количество приближений, которое необходимо выполнить при анализе, зависит от стабильности реперной основы и от количества реперов в ней. Оптимальный вариант достигается тогда, когда по результатам анализа устанавливаются m таких устойчивых реперов, при дальнейших приближениях которых не удается выявить их смещения.

Рассмотрим пример использования предлагаемого способа. Из табл. 2 видно, что для репера R_{r3} коэффициент устойчивости K минимален. Вычислим смещение этого репера при условии стабильности 1, 2, 4, 5 пунктов. Для этого составим матрицы A' , l' , r' . Имеем

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r' = \begin{pmatrix} 100 & & & \\ & 100 & & \\ & & 100 & 0 \\ & & & 100 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A'' , l'' и r'' имеют вид

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad l'' = h_1 = \begin{pmatrix} +0,4 \\ +1,9 \\ -1,5 \\ +1,4 \\ -2,0 \end{pmatrix}, \quad r'' = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате решения системы уравнений получим смещение R_{r3} , которое превышает допустимую ошибку определения (см. табл. 2, графы 3 и 4), что свидетельствует о его неустойчивости.

Определим по методике [2] вертикальные смещения оставшихся четырех реперов, не принимая во внимание репер R_{r3} , и их допустимые ошибки.

Из табл. 2 видно, что минимальное значение коэффициента K имеет репер R_{r5} (табл. 2, графы 5 и 6).

Результаты вычислений смещений R_{r3} и R_{r5} при условии стабильности остальных реперов приведены в табл. 2 (графы 7, 8) и свидетельствуют о неустойчивости этих пунктов.

Затем опять по методике [2] определим смещения реперов R_{r1} , R_{r2} , R_{r4} и их допустимые ошибки вычисления (табл. 2, графы 9 и 10).

Дальнейшие результаты вычислений по предлагаемой методике приведены в табл. 2 (графы 11—14).

Из них следует, что реперы R_{r3} и R_{r5} получили смещения $+1,7$ мм при допустимой ошибке их определения 1,4 мм. Пункты R_{r1} , R_{r2} , R_{r4} стабильны.

Зададим новые значения смещений для реперов сети (см. рис. 1) $s_2 = s_5 = +5,0$ мм и $s_3 = +5,0$; $s_4 = -5,0$ мм. Разности измеренных превышений, соответствующие этим смещениям, обозначены h_2 , h_3 и приведены в табл. 1.

Выполняя вычисления по предлагаемой методике, получаем для первого варианта заданных смещений $s_3 = +4,7$ мм, $s_5 = +4,7$ мм при средней квадратической ошибке их определения 0,7 мм; для второго варианта заданных смещений $s_3 = +4,7$ мм, $s_5 = -5,3$ мм при средней квадратической ошибке их определения 0,7 мм.

Как следует из полученных результатов, предлагаемая методика анализа стабильности реперов высотной основы позволяет с большей надежностью характеризовать не только устойчивость отдельных пунктов, но и определять их смещение, что имеет важное значение в инженерной практике.

1. Гавышин В. Н., Стороженко А. Ф. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализа устойчивости реперов. — М.: Недра, 1981. — 215 с.
2. Рабинович И. Е. Уравнивание свободных сетей и задача контроля устойчивости высотной основы. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотоосъемка, 1977, вып. 4, с. 70—78.
3. Федосеев Ю. Е. Анализ способов исследования устойчивости реперов высотной основы. — В кн.: Исследования по геодезии, картографии и аэрофотоосъемке. М., 1977, с. 39—49.

Статья поступила в редакцию 29. 01. 85