

Д. С. ХИЖАК, А. Е. ФИЛИППОВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ  
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК  
СВЕТОВОЙ КРИВОЙ

В [1] рассмотрен один из частных случаев определения световой кривой по результатам геодезических и метеорологических измерений, когда модель атмосферы над горизонтальной плоскостью *ху* системы декартовых координат *оху<sub>z</sub>*, в начале которой должен угломерный инструмент, описывают уравнениями

$$r = \frac{P}{RT} \mu, \quad g\rho = -\frac{dP}{dz}. \quad (1)$$

Решение отбрасывают в виде степенных рядов

$$P = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots, \\ T = T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots \quad (2)$$

Оно приводит к следующим выражениям для коэффициентов  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = -\frac{P_0 g \mu}{T_0 R}, \quad P_2 = -\frac{P_1}{2T_0} \left( \frac{g \mu}{R} + t_1 \right). \quad (3)$$

В формулах (1)–(3)  $R$  — газовая постоянная;  $\mu$  — моль воздуха;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $z$  — высота над плоскостью *ху*;  $P$ ,  $T$  и  $\rho$  — соответственно давление, абсолютная температура и плотность воздуха на высоте  $z$ ;  $P_0$  и  $T_0$  — давление и температура на уровне  $z=0$  (у инструмента).

Величины  $T_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  определяют по значениям температуры на высотах  $h_j$  путем решения системы уравнений вида

$$T_j = T_0 + h_j t_1 + h_j^2 t_2 + \dots \quad (4)$$

Давление  $P$  измеряется непосредственно.

Ось *ох* системы координат располагается в вертикальной плоскости наблюдаемого предмета, зенитное расстояние  $\xi$  которого измеряется инструментом.

В соответствии с предложенной в [2] методикой интегрирования для дифференциального уравнения световой кривой в случае, когда показатель преломления  $n$  не зависит непосредственно от  $x$ , аппликату  $z_k$  точки кривой с абсциссой  $x_k$  определяют выражением

$$z_k = \Delta x \sum_{i=1}^{k-1} z^i + \frac{1}{2} \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} z^i + \dots, \quad (5)$$

где

$$z^i = \left( \frac{dz}{dx} \right)_i = \text{ctg } \xi_i = \pm \sqrt{\frac{n_i^2}{n_0^2 \sin^2 \xi} - 1}. \quad (6)$$

В формулах (5), (6)  $k$  — число шагов интегрирования;  $\Delta x = x_k/k$ ;

$$n_i = 1 + \frac{\mu P_i}{RT_i} \alpha, \quad n_0 = 1 + \alpha \frac{\mu P_0}{RT_0}. \quad (7)$$

значения показателя преломления воздуха в текущей и начальной точках световой кривой.

В настоящей работе мы приводим формулы для приближенной оценки влияния случайных ошибок измерений зенитного расстояния  $\xi$ , давления  $P_0$  и температур  $T_j$  на уровнях  $h_j$  на вычисляемые по (5) значения аппликаты  $z_k$  конечной точки кривой в зависимости от расстояния  $x_k$  и числа  $k$  шагов интегрирования. Ошибки собственно интегрирования не рассматриваем. Предполагаем, что аппликата кривой монотонно возрастает или убывает (в формуле (6) сохраняется постоянство знака). В (5) удерживаем только первый член справа, выражающий главную часть приращения функции. Влиянием остальных членов на оценку точности можно пренебречь.

Оценим влияние на  $z_k$  ошибок  $dT_0$ ,  $dt_1$ ,  $dt_2$ . Дифференцируя (2), (5)–(7), найдем

$$dz_k = \Delta x \sum_{i=1}^{k-1} z^i, \quad (8)$$

$$dz^i = \frac{1 + z^i (dn_i - dP_0)}{z^i} \left( \frac{dn_i}{n_i} - \frac{dP_0}{P_0} \right), \quad (9)$$

$$dn_i = -(n_i - 1) \left( \frac{dT_i}{T_i} - \frac{dP_i}{P_i} \right), \quad dn_0 = -(n_0 - 1) \frac{dT_0}{T_0}, \quad (10)$$

$$\frac{dT_i}{T_i} \approx \frac{dT_0 + z_i dt_1 + z_i^2 t_2}{T_0}, \quad (11)$$

$$\frac{dP_i}{P_i} \approx \frac{z_i dP_1 + z_i^2 dP_2}{P_1},$$

В (11) допущены относительные ошибки порядка

$$(z_i t_1 + z_i^2 t_2) \frac{1}{T_0}, \quad (z_i P_1 + z_i^2 P_2) \frac{1}{P_0}. \quad (12)$$

Такого же порядка будет относительная ошибка окончательных формул для оценки точности. Задаваясь допустимой относительной ошибкой  $m$ , можно с помощью неравенств

$$|z_i t_1 + z_i^2 t_2| \leq m T_0, \quad |z_i P_1 + z_i^2 P_2| \leq m P_0 \quad (13)$$

определить область значений  $z$ , при которых полученные ниже формулы будут применимы.

Принимая во внимание (10), (11), приведем формулу (9) к виду

$$dz^i = -\frac{1 + z^i}{n_0 z^i} \left[ \Delta n_i \frac{dT_0}{T_0} + \frac{n_0 - 1 + \Delta n_i}{T_0} (z_i dt_1 + z_i^2 dt_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{n_0 - 1 + \Delta n_i}{P_0} (z_i dP_1 + z_i^2 dP_2) \right], \quad (14)$$

где  $\Delta n_i = n_i - n_0$ ,  
 $C$  относительной погрешностью (12) имеем на основании (7)

$$n_i - n_0 = (n_0 - 1)(D + D_1 z_1) z_1, \quad (7)$$

$$D = \frac{P_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0}, \quad D_1 = \frac{P_2}{P_0} - \frac{t_2}{T_0}. \quad (15)$$

Учитывая (15) и сохраняя прежнее относительную точность в оценке влияния каждой из ошибок  $dT_0$ ,  $dt_1$ ,  $dt_2$  на аппликату  $z_k$ , формулу (14) запишем окончательно так:

$$dz_k^i = - \frac{(1 + z_1^2)(n_0 - 1) z_1}{z_1 n_0} \left[ (D + D_1 z_1) \frac{dt_2}{T_0} + (dt_1 + z_1 dt_2) \frac{1}{T_0} - (dp_1 + z_1 dp_2) \frac{1}{P_0} \right]. \quad (16)$$

Выполняя суммирование (8) после подстановки в нее (16), принимаем с пренебрегаемой погрешностью  $z_1' = \text{ctg } \xi$ , где  $\xi$  — среднее значение зенитного расстояния вдоль световой кривой, и используем выражения

$$\Delta z \approx \Delta x \text{ ctg } \xi, \quad z_1 = i \Delta z,$$

$$\sum_{i=1}^{l-k-1} i = k(k-1)/2, \quad \sum_{i=1}^{l-k-1} i^2 = k(k-1)(2k-1)/6,$$

$$\sum_{i=1}^{l-k-1} z_1^i \approx \Delta z^2 \sum_{i=1}^{l-k-1} i^2, \quad \sum_{i=1}^{l-k-1} z_1 \approx \Delta z \sum_{i=1}^{l-k-1} i.$$

После некоторых преобразований формула (16) имеет вид

$$dz_k = - \frac{(n_0 - 1)(k-1) x_k^2}{2n_0 k \sin^2 \xi} \left[ (D + D_1) \frac{2k-1}{3k} z_k \frac{dT_0}{T_0} + \frac{dt_1}{T_0} - \frac{dp_1}{P_0} + \frac{2k-1}{3k} z_k \left( \frac{dT_2}{T_0} - \frac{dp_2}{P_0} \right) \right]. \quad (17)$$

В знаменателе выражения перед квадратной скобкой можно принять  $n_0 = 1$ .

Чтобы получить значения  $dp_1$ ,  $dp_2$  дифференцируем (3):

$$dp_1 = \frac{P_0}{T_0} dT_0, \quad dp_2 = - \frac{2P_2}{T_0} dT_0 - \frac{P_1}{2T_0} dt_1. \quad (18)$$

Принимая во внимание (12), (15), (18) и пренебрегая членами, содержащими малый коэффициент  $p_2$ , представим (17) следующей группой формул:

$$dz_k = dz_k^T + dz_k^t + dz_k^p,$$

$$dz_k^T = - \frac{(n_0 - 1)(k-1) x_k^2}{2kT_0 \sin^2 \xi} \left[ \frac{2P_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0} - \frac{(2k-1) z_k t_2}{3kT_0} \right] dT_0,$$

$$dz_k^t = - \frac{(n_0 - 1)(k-1) x_k^2}{2kT_0 \sin^2 \xi} dt_1,$$

$$dz_k^p = - \frac{(n_0 - 1)(2k-1)(k-1) x_k^2 z_k}{3k^2 T_0 \sin^2 \xi} dt_2.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оценки влияния на аппликату  $z_k$  ошибок измеренного давления  $P_0$  и зенитного расстояния  $\xi$ :

$$dz_k^{P_0} = \frac{(n_0 - 1)(k-1) x_k^2}{2kP_0 \sin^2 \xi} \left[ \frac{2P_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0} - \frac{(2k-1) z_k t_2}{3kT_0} \right] dP_0,$$

$$dz_k^\xi = - \frac{x_k}{\sin^2 \xi} d\xi.$$

Величины  $dT_0$ ,  $dt_1$ ,  $dt_2$  являются функциями случайных ошибок измерения температуры  $T_j$  на уровнях  $h_j$ . Средние квадратические значения этих величин как функций средней квадратической ошибки от измерения температуры получим по известным правилам оценки точности при решении по способу наименьших квадратов системы уравнений вида (4), определяющих  $T_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$ .

При априорной оценке значения от следует, наряду с инструментальной составляющей, учесть ошибку репрезентативности результатов измерений.

1. Хижак Л. С., Писинчук Н. Д., Фисс М. М. Определение уравнения световой кривой по результатам геодезических и метеорологических измерений. Геодезия, картография и аэрофотограмметрия, 1985, № 43, с. 110—113. 2. Хижак Л. С., Дидух И. И., Яскилка Н. В. Об одном методе нахождения уравнения световой кривой. Тез докл. VI Всесоюз. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере. — Томск, 1981, к. 3, с. 114—117.

Статья поступила в редакцию 04.05.85

УДК 528.633

С. Н. ХОДОРОВ

### ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОРАЗРУДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИИ С УЧЕТОМ КРИТЕРИЯ НИЧТОЖНОСТИ ВЛИЯНИЯ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Критерием, обуславливающим ничтожное влияние ошибок исходных данных на ошибки измерений в соответствующих стадиях развития геодезического обоснования при проектировании много-разрудных геодезических построений, является коэффициент обеспечения точности  $k$ , который в общем случае характеризуется отношением ошибок измерений к ошибкам исходных данных. В гео-