УДК 528.3

Л. С. ХИЖАК, А. Е. ФИЛИППОВ

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧЕК СВЕТОВОЙ КРИВОЙ

В [1] рассмотрен один из частных случаев определения световой кривой по результатам геодезических и метеорологических измерений, когда модель атмосферы над горизонтальной плоскостью *xoy* системы декартовых координат *oxyz*, в начале которой расположен угломерный инструмент, описывают уравнениями

$$\rho = \frac{P}{RT}\mu, \quad g\rho = -\frac{dP}{dz}. \tag{1}$$

Решение отыскивают в виде степенных рядов

$$P = P_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots,$$
$$T = T_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \ldots. \tag{2}$$

Оно приводит к следующим выражениям для коэффициентов p_1 и p_2:

$$p_1 = -\frac{P_0 g\mu}{T_0 R}, \quad p_2 = -\frac{p_1}{2T_0}\left(\frac{g\mu}{R} + t_1\right). \tag{3}$$

В формулах (1)—(3) R — газовая постоянная; μ — моль воздуха; g — ускорение силы тяжести; z — высота над плоскостью *xoy*; p, T и ρ — соответственно давление, абсолютная температура и плотность воздуха на высоте z; P_0 и T_0 — давление и температура на уровне $z=0$ (у инструмента).

Величины T_0, t_1, t_2 определяют по значениям температуры на высотах h_j путем решения системы уравнений вида

$$T_j = T_0 + h_j t_1 + h_j^2 t_2 + \cdots \tag{4}$$

Давление P измеряется непосредственно.

Ось *ox* системы координат располагается в вертикальной плоскости наблюдаемого предмета, зенитное расстояние ξ которого измеряется инструментом.

В соответствии с предложенной в [2] методикой интегрирования дифференциального уравнения световой кривой в случае, когда показатель преломления n не зависит непосредственно от x, аппликату z_k точки кривой с абсциссой x_k определяют выражением

$$z_k = \Delta x \sum_{i=1}^{i=k-1} z' + \frac{1}{2}\Delta x' \sum_{i=0}^{i=k-1} z_i'' + \cdots, \tag{5}$$

где

$$z_i' = \left(\frac{dz}{dx}\right)_i = \operatorname{ctg}\xi_i = \pm\sqrt{\frac{n_i^2}{n_0^2 \sin^2\xi} - 1}. \tag{6}$$

В формулах (5), (6) k — число шагов интегрирования; $\Delta x = x_k/k$;

$$n_i = 1 + \frac{\mu P_i}{RT_i}\alpha, \quad n_0 = 1 + \alpha\frac{\mu P_0}{RT_0}. \tag{7}$$

значения показателя преломления воздуха в текущей и начальной точках световой кривой.

В настоящей работе мы приводим формулы для приближенной оценки влияния случайных ошибок измерений зенитного расстояния ξ, давления P_0 и температур T_j на уровнях h_j на вычисляемые по (5) значения аппликаты z_k конечной точки кривой в зависимости от расстояния x_k и числа k шагов интегрирования. Ошибки собственно интегрирования не рассматриваем. Предполагаем, что аппликата кривой монотонно возрастает или убывает (в формуле (6) сохраняется постоянство знака). В (5) удерживаем только первый член справа, выражающий главную часть приращения функции. Влиянием остальных членов на оценку точности можно пренебречь.

Оценим влияние на z_k ошибок dT_0, dt_1, dt_2. Дифференцируя (2), (5)—(7), найдем

$$dz_k = \Delta x \sum_{i=1}^{i=k-1} dz'_i, \tag{8}$$

$$dz'_i = \frac{1+z'_i}{z'_i}\left(\frac{dn_i}{n_i} - \frac{dn_0}{n_i}\right), \tag{9}$$

$$dn_i = -(n_i-1)\left(\frac{dT_i}{T_i} - \frac{dP_i}{P_i}\right), \quad dn_0 = -(n_0-1)\frac{dT_0}{T_0}, \tag{10}$$

$$\frac{dT_i}{T_i} \approx \frac{dT_0 + z_i\,dt_1 + z_i^2\,t_2}{T_0}, \tag{11}$$

$$\frac{dP_i}{P_i} \approx \frac{z_i\,dp_1 + z_i^2\,dp_2}{P_0}.$$

В (11) допущены относительные ошибки порядка

$$(z_i t_1 + z_i^2 t_2)\frac{1}{T_0}, \quad (z_i p_1 + z_i^2 p_2)\frac{1}{P_0}. \tag{12}$$

Такого же порядка будет относительная ошибка окончательных формул для оценки точности. Задаваясь допустимой относительной ошибкой m, можно с помощью неравенств

$$|z_i t_1 + z_i^2 t_2| \leqslant mT_0, \quad |z_i p_1 + z_i^2 p_2| \leqslant mP_0 \tag{13}$$

определить область значений z, при которых полученные ниже формулы будут применимы.

Принимая во внимание (10), (11), приведем формулу (9) к виду

$$dz'_i = -\frac{1+z_i'^2}{n_0 z'_i}\left[\Delta n_i \frac{dT_0}{T_0} + \frac{n_0 - 1 + \Delta n_i}{T_0}(z_i\,dt_1 + z_2^2\,dt_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{n_0 - 1 + \Delta n_i}{P_0}(z_i\,dp_1 + z_2^2\,dp_2)\right], \tag{14}$$

где $\Delta n_i = n_i - n_0$.

С относительной погрешностью (12) имеем на основании (7)

$$n_i - n_0 = (n_0 - 1)(D + D_1 z_i) z_i,$$

$$D = \frac{p_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0}, \quad D_1 = \frac{p_2}{P_0} - \frac{t_2}{T_0}. \tag{15}$$

Учитывая (15) и сохраняя прежнюю относительную точность в оценке влияния каждой из ошибок dT_0, dt_1, dt_2 на аппликату z_k, формулу (14) запишем окончательно так:

$$dz'_i = -\frac{(1 + z_i'^2)(n_0 - 1) z_i}{z'_i n_0}\left[(D + D_1 z_i)\frac{dt_2}{T_0} + \right.$$

$$\left. + (dt_1 + z_i dt_2)\frac{1}{T_0} - (dp_1 + z_i dp_2)\frac{1}{P_0}\right]. \tag{16}$$

Выполняя суммирование (8) после подстановки в нее (16), принимаем с пренебрегаемой погрешностью $z_i' = \operatorname{ctg} \xi$, где ξ — среднее значение зенитного расстояния вдоль световой кривой, и используем выражения

$$\Delta z \approx \Delta x \operatorname{ctg} \xi, \quad z_i = i\Delta z,$$

$$\sum_{i=1}^{i=k-1} i = k(k-1)/2, \quad \sum_{i=1}^{i=k-1} i^2 = k(k-1)(2k-1)/6,$$

$$\sum_{i=1}^{i=k-1} z_i^2 \approx \Delta z^2 \sum_{i=1}^{i=k-1} i^2, \quad \sum_{i=1}^{i=k-1} z_i \simeq \Delta z \sum_{i=1}^{i=k-1} i.$$

После некоторых преобразований формула (16) имеет вид

$$dz_k = -\frac{(n_0 - 1)(k - 1) x_k^2}{2n_0 k \sin^2 \xi}\left[(D + D_1 \frac{2k-1}{3k} z_k)\frac{dT_0}{T_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{dt_1}{T_0} - \frac{dp_1}{p_0} + \frac{2k-1}{3k} z_k \left(\frac{dT_2}{T_0} - \frac{dp_2}{p_0}\right)\right]. \tag{17}$$

В знаменателе выражения перед квадратной скобкой можно принять $n_0 = 1$.

Чтобы получить значения dp_1, dp_2 дифференцируем (3):

$$dp_1 = \frac{P_0}{T_0} dT_0, \quad dp_2 = -\frac{2p_2}{T_0} d T_0 - \frac{p_1}{2T_0} dt_1. \tag{18}$$

Принимая во внимание (12), (15), (18) и пренебрегая членами, содержащими малый коэффициент p_2, представим (17) следующей группой формул:

$$dz_k = dz_k^{T_0} + dz_k^{t_1} + dz_k^{t_2},$$

$$dz_k^{T_0} = -\frac{(n_0 - 1)(k - 1) x_k^2}{2kT_0 \sin^2 \xi}\left[\frac{2p_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0} - \frac{(2k_1 - 1) zkt_2}{3kT_0}\right] dT_0,$$

$$dz_k^{t_1} = -\frac{(n_0-1)(k-1)\,x_k^2}{2kT_0\sin^2\xi}\,dt_1,$$

$$dz_k^{t_2} = -\frac{(n_0-1)(2k-1)(k-1)\,x_k^2 z_k}{3k^2T_0\sin^2\xi}\,dt_2.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оценки влияния на аппликату z_k ошибок измеренного давления P_0 и зенитного расстояния ξ:

$$dz_k^{P_0} = \frac{(n_0-1)\,(k-1)\,x_k^2}{2kP_0\sin^2\xi}\left[\frac{2p_1}{P_0} - \frac{t_1}{T_0} - \frac{(2k-1)\,z_k t_2}{3kT_0}\right]dP_0,$$

$$dz_k^{\xi} = -\frac{x_k}{\sin^2\xi}\,d\xi.$$

Величины dT_0, dt_1, dt_2 являются функциями случайных ошибок измерения температуры T_j на уровнях h_j. Средние квадратические значения этих величин как функций средней квадратической ошибки σ_T измерения температуры получим по известным правилам оценки точности при решении по способу наименьших квадратов системы уравнений вида (4), определяющих T_0, t_1 и t_2.

При априорной оценке значения σ_T следует, наряду с инструментальной составляющей, учесть ошибку репрезентативности результатов измерений.

1. *Хижак Л. С., Иосипчук Н. Д., Фыс М. М.* Определение уравнения световой кривой по результатам геодезических и метеорологических измерений. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1985, № 43, с. 110—113. 2. *Хижак Л. С., Дидух И. И., Яскилка Н. Б.* Об одном методе нахождения уравнения световой кривой: Тез докл. VI Всесоюз. симп. по распространению лазерного излучения в атмосфере. — Томск, 1981, к. 3, с. 114—117.

Статья поступила в редколлегию 04. 05. 85