МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 11

УДК 528.232.24

А. Е. ФИЛИППОВ

ФОРМУЛЫ СО СРЕДНИМИ АРГУМЕНТАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЛАВНОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВЕ

При обработке геодезических сетей как пространственных без проектирования их на отсчетную поверхность возникает необходимость решения геодезических задач по прямым, соединяющим триангуляционные пункты. Необходимые формулы получены М. С. Молоденским [3]. Они имеют замкнутый вид и применимы при любых расстояниях между пунктами. В. Ф. Ермеев привел эти формулы к виду, удобному для практических вычислений (при $H_1=H_2=0$), и показал их применение на примерах [1]. Для решения необходимы счетные машины и таблицы натуральных значений тригонометрических функций.

В некоторых случаях практики, например при решении относительно небольшого числа геодезических задач, могут оказаться удобными формулы, требующие использования таблиц логарифмов. Подобные формулы, используемые для вычислений в триангуляции при расстояниях, не превышающих 30—40 *км*, предлагаются ниже.

При выводе этих формул мы исходили из следующих уравнений, которые можно рассматривать как дифференциальные уравнения прямой в ортогональных геодезических координатах B, L, H:

$$\frac{dB}{ds}=\frac{\sin Z\cos A}{M+H},\quad \frac{dL}{ds}=\frac{\sin Z\sin A}{(N+H)\cos B},\quad \frac{dH}{ds}=\cos Z,$$

$$\frac{dZ}{ds}=-\sin Z\left(\frac{\cos^2 A}{M+H}+\frac{\sin^2 A}{N+H}\right),$$

$$\frac{dA}{ds}=\left[\frac{\cos Z\sin A\cos A}{M+H}+\frac{(\operatorname{tg} B\sin Z-\cos Z\cos A)\sin A}{N+H}\right]. \qquad (1)$$

В этих уравнениях величины B, L, H, A и Z есть соответственно геодезические широта, долгота, высота, азимут и зенитное расстояние прямой в текущей точке, s — расстояние вдоль прямой между текущей точкой и точкой, принятой за начальную M и N — главные радиусы кривизны отсчетного эллипсоида на широте B.

Введя обозначения

$$Z'_{21}=180^\circ-Z_{21},\qquad B_m=\frac{1}{2}(B_1+B_2),\qquad \Delta A_{12}=A'_{21}-A_{12},$$

$$A'_{21}=A_{21}\pm 180^\circ,\qquad \Delta B_{12}=B_2-B_1,\qquad \Delta Z_{12}=Z'_{21}-Z_{12},$$

$$Z_m = \frac{1}{2}(Z_{12} + Z'_{21}), \quad \Delta L_{12} = L_2 - L_1, \quad H_m = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$$

$$A_m = \frac{1}{2}(A_{12} + A'_{21}), \quad \Delta H_{12} = H_2 - H_1$$

и применив хорошо известный и описанный [2, 4] метод разложения разностей широт, долгот и т. д. в ряды со средними аргументами, мы получили следующие выражения для величин ΔB_{12}, ΔL_{12}, ΔA_{12}, ΔH_{12}, ΔZ_{12}, в функции расстояния s_{12} между точками и средних аргументов B_m, A_m, H_m, Z_m.

$$\lg \Delta B''_{12} = \lg s_{12} \frac{\sin Z_m \cos A_m}{M_m + H_m} \rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z''^2_{12} + \frac{1}{4} \nu \Delta L''^2_{12} \sin^2 B_m + \frac{1}{2} \nu \Delta L''^2_{12},$$

$$\lg \Delta L''_{12} = \lg s_{12} \frac{\sin Z_m \sin A_m}{(N_m + H_m)\cos B_m} \rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z''^2_{12} - \frac{1}{4} \nu \Delta B''^2_{12} + \frac{1}{4} \nu \Delta L''^2_{12} \sin^2 B_m,$$

$$\lg \Delta A''_{12} = \lg s_{12} \frac{\sin A_m}{N_m + H_m} \left(\operatorname{tg} B_m \sin Z_m + \frac{M_m \cos Z_m \cos A_m}{M_m + H_m} \eta^2_m \right) \rho'' +$$

$$+ \frac{3}{4} \nu \Delta Z''^2_{12} + \frac{1}{4} \nu \Delta L''^2_{12} \sin^2 B_m,$$

$$\lg \Delta H_{12} = \lg s_{12} \cos Z_m + \frac{3}{4} \nu \Delta Z''^2_{12},$$

$$\lg \Delta Z''_{12} = \lg s_{12} \sin (180^\circ + Z_m) \left(\frac{\cos^2 A_m}{M_m + H_m} + \frac{\sin^2 A_m}{N_m + H_m} \right) \rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z''^2_{12}$$

или

$$\lg \Delta Z''_{12} = \lg s_{12} \frac{\sin (180^\circ + Z_m)}{N_m} (1 + \eta^2_m \cos^2 A_m) \rho'' - \mu \left(\frac{H_m}{N_m} \right) \cdot 10^8 -$$

$$- \mu \left(\frac{H_m}{N_m} \right) \cdot 10^8 \eta^2_m \cos^2 A_m + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{H_m}{N_m} \right)^2 \cdot 10^8 + \frac{1}{4} \nu \Delta Z''^2_{12},$$

$$\nu = \frac{\mu \cdot 10^8}{6 \rho''^2}. \tag{2}$$

В этих формулах s_{12} — расстояние между точками *1* и *2*, $\eta^2_m = e'^2 \times \times \cos^2 B_m$, e' — второй эксцентриситет меридианного эллипса отсчетного эллипсоида, μ — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Формулы (2) решают прямую геодезическую задачу в пространстве по прямой, соединяющей известную точку с определяемой, так как, вычислив разности ΔB_{12}, ΔL_{12}, ΔA_{12} и т. д., находим

$$B_2 = B_1 + \Delta B_{12}, \qquad A_{21} = A_{12} + \Delta A_{12} \pm 180^\circ,$$
$$L_2 = L_1 + \Delta L_{12}, \qquad Z_{21} = 180^\circ - (Z_{12} + \Delta Z_{12}).$$
$$H_2 = H_1 + \Delta H_{12},$$

При выводе отбрасывались члены порядка $\eta^2 s^3/N^3$, Hs^3/N^4 (в выражении для ΔH_{12} соответственно $\eta^2 s^3/N^2$, Hs^3/N^3). Так как для точек земной поверхности $H/N < 1/1200$, а зенитные расстояния Z_m в триангуляции близки к 90°, то можно считать, что точность формул (2) такого же порядка, как и точность вторых формул Гаусса для решения прямой геодезической задачи по геодезической линии на поверхности эллипсоида. При расстоянии $s < 30—40$ *км* в экваториальных и средних широтах формулы (2) дают ошибку, не превышающую 0",0001 в геодезических координатах, азимутах и зенитных расстояниях и 0,001 *м* в высотах.

Из-за необходимости последовательных приближений при решении прямой геодезической задачи формулы (2) не имеют каких-либо преимуществ по сравнению с соответствующими формулами М. С. Молоденского. Правда, их можно использовать как контрольные, так как в этом случае результат получается сразу. Что же касается обратной геодезической задачи, то есть определения по известным пространственным координатам двух пунктов расстояния между ними, а также прямых и обратных геодезических азимутов и зенитных расстояний, то она решается с помощью формул (2) относительно просто. Для этой цели формулы (2) после несложных преобразований можно написать в следующим виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \lg C &= \frac{1}{4}\nu\Delta B''^2_{12} - \frac{1}{4}\nu\Delta L''^2_{12}\sin^2 B_m, \\ \Delta \lg D &= -\frac{1}{2}\nu\Delta L''^2_{12} - \frac{1}{4}\nu\Delta L''^2_{12}\sin^2 B_m, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \lg C &= \lg(N_m + H_m)\Delta L''_{12}\cos B_m + \Delta \lg C = \lg s \sin Z_m \sin A_m \rho'' + \frac{1}{4}\nu\Delta Z''^2_{12}, \\ \lg D &= \lg(M_m + H_m)\Delta B''_{12} + \Delta \lg D = \lg s \sin Z_m \cos A_m \rho'' + \frac{1}{4}\nu\Delta Z''^2_{12}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\lg \operatorname{tg} A_m = \lg C - \lg D, \qquad (5)$$

$$\lg E = \lg D - \lg\cos A_m = \lg C - \lg \sin A_m = \lg s \sin Z_m \rho'' + \frac{1}{4}\nu\Delta Z''^2_{12}, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lg \Delta Z''_{12} = \lg\left[-E(1 + \eta^2_m\cos^2 A_m)\frac{1}{N_m}\right] - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3, \\ &\Delta_1 = \mu\left(\frac{H_m}{N_m}\right)\cdot 10^8,\ \Delta_2 = \Delta_1\eta^2_m\cos^2 A_m,\ \Delta_3 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{H_m}{N_m}\right)^2\cdot 10^8, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} \lg F &= \lg \Delta H_{12} - \frac{3}{4}\nu\Delta Z''^2_{12} = \lg s\cos Z_m, \\ \lg G &= \lg E - \lg \rho'' - \frac{1}{4}\nu\Delta Z''^2_{12} = \lg s \sin Z_m, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lg \operatorname{ctg} Z_m = \lg F - \lg G, \\ &Z_{12} = Z_m - \frac{1}{2}\Delta Z_{12},\ Z_{21} = 180° - \left(Z_m + \frac{1}{2}\Delta Z_{12}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\lg s = \lg F - \lg\cos Z_m = \lg G - \lg \sin Z_m, \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lg \Delta A_{12} = \lg s \frac{\sin A_m}{N_m + H_m} \rho'' \left(\operatorname{tg} B_m \sin Z_m + \frac{M_m \cos Z_m \cos A_m}{M_m + H_m} \eta_m^2 \right) + \\
&\qquad + \Delta \lg \Delta A_{12}, \\
&\Delta \lg \Delta A_{12} = \frac{3}{4} \nu \Delta Z_{12}''^2 + \frac{1}{4} \nu \Delta L_{12}''^2 \sin^2 B_m,\ A_{12} = A_m - \frac{1}{2} \Delta A_{12}, \\
&A_{21} = A_m + \frac{1}{2} \Delta A_{12} \pm 180^\circ.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Выражения (3)—(11) записаны в последовательности выполнения решения.

Если точки *1* и *2* лежат на поверхности отсчетного эллипсоида (случай, рассмотренный В. Ф. Еремеевым), то решение значительно упрощается, так как в этом случае с принятой степенью точности $Z_m = 90^\circ$ и формулы (3)—(11) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta \lg C &= \frac{1}{4} \nu \Delta B_{12}''^2 - \frac{1}{4} \nu \Delta L_{12}''^2 \sin^2 B_m, \\
\Delta \lg D &= -\frac{1}{2} \nu \Delta L_{12}''^2 - \frac{1}{4} \nu \Delta L_{12}''^2 \sin^2 B_m,
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\lg C &= \lg N_m \Delta L_{12}'' \cos B_m + \Delta \lg C = \lg s \sin A_m \rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z_{12}''^2, \\
\lg D &= \lg M_m \Delta B_{12}'' + \Delta \lg D = \lg s \cos A_m \rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z_{12}''^2,
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\lg \operatorname{tg} A_m = \lg C - \lg D, \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lg E = \lg D - \lg \cos A_m = \lg C - \lg \sin A_m = \lg s\rho'' + \frac{1}{4} \nu \Delta Z_{12}''^2, \\
&\lg \Delta Z_{12}'' = \lg \left[-E (1 + \eta_m^2 \cos^2 A_m) \frac{1}{N_m} \right],
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\lg s = \lg E - \lg \rho'' - \frac{1}{4} \nu \Delta Z_{12}''^2, \quad (16)$$

$$\lg \Delta A_{12}'' = \lg \Delta L_{12}'' \sin B_m + \frac{1}{2} \nu \Delta Z_{12}''^2 + \frac{1}{4} \nu \Delta B_{12}''^2, \quad (17)$$

$$Z_{12} = Z_m - \frac{1}{2} \Delta Z_{12},\ Z_{21} = 180^\circ - \left(Z_m + \frac{1}{2} \Delta Z_{12} \right),$$

$$A_{12} = A_m - \frac{1}{2} \Delta A_{12},\ A_{21} = A_m + \frac{1}{2} \Delta A_{12} \pm 180^\circ. \quad (18)$$

При решении с помощью восьмизначных таблиц логарифмов погрешности в зенитных расстояниях и азимутах могут достигнуть нескольких тысячных долей секунды. Зенитные расстояния нетрудно уточнить, если в разность ΔH_{12} ввести поправку

$$\delta H_{12} = -\frac{s^3 \operatorname{tg} B_m \sin^3 Z_m \cos A_m}{4 N_m^2} \eta_m^2.$$

Это выражение мы получили, удержав в разложении ΔH_{12} по степеням s члены порядка $\eta^2 s^3/N^2$ (члены, содержащие Hs^3/N^3 и $\eta^2 \cos Z\, s^3/N^2$, по-прежнему отбрасывались).

Так как ряд величин, входящих в δH_{12}, первоначально неизвестен, то можно поступить следующим образом (если вообще учитывать эту поправку). Решив задачу без учета поправки δH_{12}, вычисляем с двумя-тремя значащими цифрами ее значение, находим $H'_{12} = \Delta H_{12} + \delta H_{12}$, а затем по формуле

$$\lg \cos Z_m = \lg \Delta H'_{12} - \lg s - \frac{3}{4} \nu \Delta Z''^2_{12}$$

получаем Z_m во втором приближении.

Ниже помещен пример решения обратной геодезической задачи при $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$ и $s \approx 40$ *км*. Поправочные члены вида νx^2 и величины $\lg M$, $\lg N$ вычислялись с помощью известных таблиц. Расхождения в значениях азимутов и зенитных расстояний, полученных по формулам (3)—(11) и по формулам М. С. Молоденского, не превысили 0″,001—0″,002.

Пример решения обратной геодезической задачи в пространстве

Решение обратной геодезической задачи в пространстве

Дано: B_1, L_1, H_1, B_2, L_2, H_2.

Требуется определить s, A_{12}, A_{21}, Z_{12}, Z_{21}.

1	B_1	57°00′00″,0000
2	B_2	56 45 05, 5798
3	B_m	56 52 32, 7899
4	L_1	48°00′00″,000
5	L_2	47 32 23, 4256
6	H_1	1 000, 000
7	H_2	3 000, 000
8	H_m	2 000, 000
9	ΔB_{12}	— 894″,4202
10	ΔL_{12}	—1 656″,5744
11	ΔH_{12}	2 000, 000
22	$\lg \Delta L_{12}$	3. 219 n
27	$\lg \sin B_m$	9. 923
28	$\lg \Delta L_{12} \sin B_m$	3. 142 n
29	$\nu \Delta B_{12}^2$	136
30	$\nu \Delta L_{12}^2$	467
31	$\nu \Delta L_{12}^2 \sin^2 B_m$	327
32	$\Delta \lg C$	— 48
33	$\Delta \lg D$	—316
54	$\lg H_m$	3. 30103
55	$\lg N_m$	6. 80572
56	$\lg H_m/N_m$	6. 49531
57	$\lg \mu \cdot 10^8$	7. 63778
58	$\lg \Delta_1$	4. 13309
59	$\lg \eta_m^2 \cos^2 A_m$	6. 996
14	M_m	6 380 430, 9
16	H_m	2 000, 0
17	$M_m + H_m$	6 382 430, 9
15	N_m	6 393 269, 9
18	$N_m + H_m$	6 395 269, 9
12	$\lg M_m$	6 804 85001
13	$\lg N_m$	6 805 72304
19	$\lg (M_m + H_m)$	6 804 98612
20	$\lg (N_m + H_m)$	6 805 85888
21	$\lg \Delta L_{12}$	3 219 21094 n
23	$\lg (N_m + H_m)$	6 805 85888
26	$\lg \cos B_m$	9 737 55528
34	$\Delta \lg C$	—48
35	$\lg C$	9 762 62462 n
24	$\lg \Delta B_{12}$	2. 951 54160 n
25	$\lg (M_m + H_m)$	6. 804 98612
36	$\Delta \lg D$	—316
37	$\lg D$	9. 756 52456 n
38	$\lg \operatorname{tg} A_m$	0. 006 10006
39	A_m	225°24′08″,540
114	$\Delta A_{12}/2$	—11′33″,656
115	A_{12}	225°35′42″,196
116	A_{21}	225 12 34, 884
117	A_{21}	45 12 34, 884

60	$\lg \Delta_2$	1. 129
61	$\lg \mu \cdot 10^8$	7. 64
62	доп. $\lg 2$	9. 70
63	$2 \lg (H_m/N_m)$	2. 99
64	$\lg \Delta_3$	0. 33
65	$-\Delta_1$	—13586
66	$-\Delta_2$	— 13
67	$+\Delta_3$	+ 2
72	$\nu \Delta Z_{12}^2$	276
46	$\lg e'^2$	7. 828 56
47	$2 \lg \cos B_m$	9. 475 11
48	$2 \lg \cos A_m$	9. 692 83
49	$\lg \eta_m^2 \cos^2 A_m$	6. 996 50
50	$\eta_m^2 \cos^2 A_m$	0. 000 9920
51	$1+\eta_m^2 \cos^2 A_m$	1. 000 9920
52	$\lg (-E)$	9. 910 11101 *n*
53	доп. $\lg N_m$	3. 194 27696
68	$-\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3$	—13597
69	$\lg \Delta Z_{12}$	3. 104 68261 *n*
70	ΔZ_{12}	—1 272″,573
71	ΔZ_{12}	—21′12″,573
73	$\lg \Delta H_{12}$	3. 301 03000
74	$-\frac{3}{4} \nu \Delta Z_{12}^2$	—207
75	$\lg F$	3. 301 02793
76	$\lg E$	9. 910 11101
77	доп. $\lg \rho''$	4. 685 57487
78	$-\frac{1}{4} \nu \Delta Z_{12}^2$	—69
79	$\lg G$	4. 595 68519
80	$\lg \mathrm{ctg}\, Z_m$	8. 705 34274
81	Z_m	87°05′43″,277
82	$\Delta Z_{12}/2$	—10′36″,286
83	Z_{12}	87°16′19″,563
84	Z_{21}	86 55 06 991
85	Z_{21}	93 04 53, 009

40	$\lg D$	9. 756 52456 *n*
42	$\lg \cos A_m$	9. 846 41356 *n*
44	$\lg E$	9. 910 11100
41	$\lg C$	9. 762 62462 *n*
43	$\lg \sin A_m$	9. 852 51361 *n*
45	$\lg E$	9. 910 11101
93	$\lg \mathrm{tg}\, B_m$	0. 185 42317
94	$\lg \sin Z_m$	9. 999 44168
95	$\lg \Sigma_1$	0. 184 86485
96	Σ_1	1. 530 6111
97	$\lg \cos Z_m$	8. 7048
98	$\lg \cos A_m$	9. 8464 *n*
99	$\lg M_m$	6. 8048
100	доп. $\lg (M_m+H_m)$	3. 1950
101	$\lg \eta_m^2$	7. 3037
102	$\lg \Sigma_2$	5. 8547 *n*
103	Σ_2	—0, 000 0716
104	$\Sigma_1+\Sigma_2$	1, 530 5395
105	$\lg s$	4. 596 24351
106	$\lg \rho''$	5. 314 42513
107	$\lg \sin A_m$	9. 852 51361 *n*
108	доп. $\lg (N_m+H_m)$	3. 194 14112
109	$\lg (\Sigma_1+\Sigma_2)$	0. 184 84454
110	$\Delta \lg \Delta A_{12}$	+289
111	$\lg \Delta A_{12}$	3. 142 17080 *n*
112	ΔA_{12}	— 1 387″,313
113	ΔA_{12}	—23′ 07″,313
86	$\lg F$	3. 301 02793
87	$\lg \cos Z_m$	8. 704 78442
88	$\lg s$	4. 596 24351
89	$\lg G$	4. 595 68519
90	$\lg \sin Z_m$	9. 999 44168
91	$\lg s$	4. 596 24351
92	s	39 467, 854

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев В. Ф. Формулы и таблицы для вычисления геодезических координат по методу Молоденского. Труды ЦНИИГАиК, вып. 121, 1957.
2. Красовский Ф. Н. Избранные сочинения, т. IV, 1955.
3. Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. Тр. ЦНИИГАиК, вып. 103, 1954.
4. Урмаев Н. А. Сфероидическая геодезия. М., ВТС, 1955.

Работа поступила 11 декабря 1968 года.