МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 11

УДК 528.14

А. Е. ФИЛИППОВ

К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПРИ СОВМЕСТНОМ УРАВНИВАНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ УГЛОВ

При совместном уравнивании условным способом горизонтальных углов и зенитных расстояний в триангуляции строгую оценку точности геометрических элементов сети можно произвести по известным правилам путем совместного решения условных уравнений и весовых функций. При определении веса таких элементов, как длины сторон, астрономические φ_i, λ_i, геодезические B_i, L_i, H_i или пространственные прямоугольные x_i, y_i, z_i координаты пунктов или же астрономические α_{ik} и геодезические A_{ik} азимуты направлений необходимо, по существу, написать по выбранным ходовым линиям соответствующие условные уравнения, например,

$$\Delta\varphi_i + (\varphi_i' - \varphi_i) = 0,$$

$$\Delta L_i + (L_i' - L_i) = 0,$$

$$\Delta z_i + (z_i' - z_i) = 0.$$

Коэффициенты при поправках измеренных элементов в выражениях $\Delta\varphi_i$, ΔL_i, Δz_i и т. д. будут искомыми весовыми коэффициентами. Необходимые формулы для составления подобных выражений можно найти в работах [1, 2].

В настоящей статье мы хотим получить формулы для приближенного подсчета среднего сдвига триангуляционного ряда по высоте H, а также для приближенной оценки точности вычисления по горизонтальным и вертикальным углам направлений отвесных линий.

Рассмотрим плоский ряд равносторонних треугольников, изображенный на рисунке. Мы пренебрегаем сферичностью Земли, полагая, что отвесные линии во всех пунктах параллельны друг другу, и считаем, что зенитные расстояния равны 90°.

Оценить правомерность подобных предположений трудно, однако можно полагать, что они приведут к ошибке, не превышающей 15—20%, поскольку имеется в виду ряд относительно небольшой протяженности, а зенитные расстояния в реальном случае редко выходят за пределы 82°—98°.

Пусть xyz — система пространственных прямоугольных координат с началом в точке 1 рассматриваемого ряда. Ось z параллельна оси вращения Земли, положительное направление к северу, ось x расположена в плоскости астрономического меридиана Гринвича, а ось y направлена на 90° к востоку от оси x. Ряд расположен в плоскости yz и диагональ 1, $n+1$ совпадает с осью z. Сдвиг ряда по геодезической высоте H или вертикальный сдвиг, в данном случае есть сдвиг точки $n+$

+1 в направлении оси x. Поэтому, обозначив через s длины сторон треугольников, а через δz_{ik} — поправки измеренных зенитных расстояний, получим для весовой функции следующее выражение:

$$\Delta x_{n+1} = -s\,[n\delta z_{12} + (n-1)\,\delta z_{21} + (n-1)\,\delta z_{23} + (n-2)\,\delta z_{32} + (n-2)\,\delta z_{34} + \ldots$$
$$\ldots 2\delta z_{n-1,\,n-2} + 2\delta z_{n-1,\,n} + \delta z_{n,\,n-1} + \delta z_{n,\,n+1}], \qquad (1)$$

где n — число сторон в диагонали ряда. Это же выражение можно получить, написав для ходовой линии 1, 2,... n, $n+1$ в общем виде условное уравнение абсцисс [1] и приняв в этом уравнении

$$\varphi_i = \lambda_i = 0,\ \alpha_{i,\,i+1} = 0,\ \alpha_{i+1,\,i} = 180^\circ,$$
$$z_{i,\,k} = 90^\circ,\ \delta\varphi_1 = \delta\lambda_1 = \delta\alpha_{11'} = 0.$$

Напишем условное уравнение двугранного угла γ для общей стороны 1—2 двух пространственных треугольников $1, 2, 3$ и $1, 2, 4$ [1]

$$(-\sin K_1^{\mathrm{I}} \operatorname{ctg} A_1^{2,3} \mp \sin K_1^{\mathrm{II}} \operatorname{ctg} A_1^{2,4})\,\delta z_{1,2} +$$
$$+ \sin C_1^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} A_1^{2,3} \delta z_{1,3} \pm \sin C_1^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} A_1^{2,4} \delta z_{1,4} +$$
$$+ (\sin K_2^{\mathrm{I}} \operatorname{ctg} A_2^{1,3} \pm \sin K_2^{\mathrm{II}} \operatorname{ctg} A_2^{1,4})\,\delta z_{2,1} -$$
$$- \sin C_2^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} A_2^{1,3} \delta z_{2,3} \mp \sin C_2^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} A_2^{1,4} \delta z_{2,4} +$$
$$+ \sin K_1^{\mathrm{I}} \cos C_1^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} a_1^{2,3} \delta a_1^{2,3} \pm$$
$$\pm \sin K_1^{\mathrm{II}} \cos C_1^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} a_1^{2,4} \delta a_1^{2,4} -$$
$$- \sin K_2^{\mathrm{I}} \cos C_2^{\mathrm{I}} \operatorname{cosec} a_2^{1,3} \delta a_2^{1,3} \mp$$
$$\mp \sin K_2^{\mathrm{II}} \cos C_2^{\mathrm{II}} \operatorname{cosec} a_2^{1,4} \delta a_2^{1,4} +$$
$$+ (K_1^{\mathrm{I}} - K_2^{\mathrm{I}} \pm K_1^{\mathrm{II}} \mp K_2^{\mathrm{II}}) = 0.$$

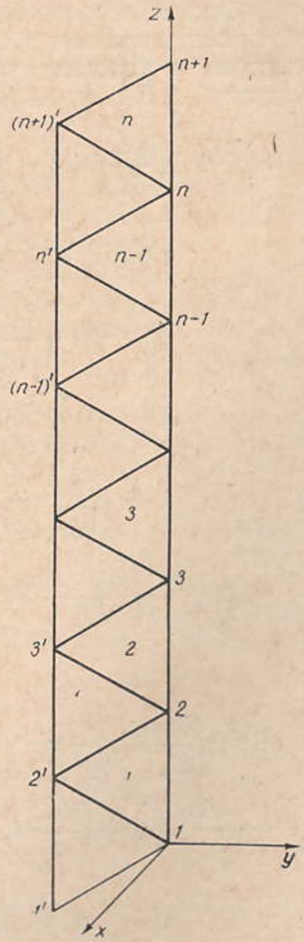

Схема триангуляционного ряда.

В нашем случае для любой из сторон 1—$2'$, 2—$2'$, 2—$3'$,... n—$(n+1)'$ углы K_1^{I}, K_2^{I}, K_1^{II}, K_2^{II}, C_1^{I}, C_2^{I}, C_1^{II}, C_2^{II} равны 90°, $A_i^{jk} = a_i^{jk} = a$, где $a = 60^\circ$ — горизонтальный угол, поэтому условные уравнения углов γ примут вид:

сторона 1—$2'$

$$\operatorname{cosec} a\delta z_{11'} - \operatorname{cosec} a\delta z_{2'1'} - 2\operatorname{ctg} a\delta z_{12'} + 2\operatorname{ctg} a\delta z_{2'1} +$$
$$+ \operatorname{cosec} a\delta z_{12} - \operatorname{cosec} a\delta z_{2'2} + w_{12'} = 0,$$

сторона 2—$2'$

$$\operatorname{cosec} a\delta z_{21} - \operatorname{cosec} a\delta z_{2'1} - 2\operatorname{ctg} a\delta z_{22'} + 2\operatorname{ctg} a\delta z_{2'2} +$$
$$+ \operatorname{cosec} a\delta z_{23'} - \operatorname{cosec} a\delta z_{2'3'} + w_{22'} = 0, \qquad (2)$$

сторона 2—$3'$

$$\operatorname{cosec} a\delta z_{22'} - \operatorname{cosec} a\delta z_{3'2'} - 2\operatorname{ctg} a\delta z_{23'} + 2\operatorname{ctg} a\delta z_{3'2} +$$
$$+ \operatorname{cosec} a\delta z_{23} - \operatorname{cosec} a\delta z_{3'3} + w_{23'} = 0,$$

сторона $3-3'$

$$\left.\begin{array}{c}-\operatorname{cosec} a\delta z_{32}-\operatorname{cosec} a\delta z_{3'2}-2\operatorname{ctg} a\delta z_{33'}+2\operatorname{ctg} a\delta z_{3'3}+\\+\operatorname{cosec} a\delta z_{34'}-\operatorname{cosec} a\delta z_{3'4'}+w_{33'}=0 \quad \text{и т. д.}\end{array}\right|$$

Для ряда, изображенного на рисунке, число этих уравнений равно $2n-1$.

Считая астрономические определения в пунктах 1 и $n+1$ безошибочными, напишем в общем виде условное уравнение астрономической широты и условное уравнение астрономической долготы для ходовой линии $1, 2, 3, \ldots n+1$ [1, 3]:

$$\left.\begin{array}{c}p_1^{2,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+p_1^{3,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+p_1^{4,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial l_p}\delta l_p\right)_3+\cdots\\ \cdots+p_1^{n-1,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-2}+p_1^{n,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1}+\\ +p_1^{n+1,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_n+p_3^{1,\,n+1}(\delta a_1^{1'2'}+\delta a_1^{2'2})+\\ +p_3^{2,\,n+1}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_2^{12'}+\delta a_2^{2'3'}+\delta a_2^{3'4}\right]+\\ +p_3^{3,\,n+1}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{32}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\delta a_3^{23'}+\delta a_3^{3'4'}+\delta a_3^{4'5}\right]+\cdots\\ \cdots+p_3^{n,\,n+1}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{n,\,n-1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1}+\delta a_n^{n-1,\,n'}+\delta a_n^{n',\,(n+1)'}+\delta a_n^{(n+1)',\,n+1}\right]+\\ +w_\varphi=0,\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{c}q_1^{2,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+q_1^{3,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\cdots+q_1^{n,\,n+1}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1}+\\ +\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\left(\frac{\partial\lambda_3}{\partial l_p}\delta l_p\right)_2+\cdots+\left(\frac{\partial\lambda_n}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1}+\left(\frac{\partial\lambda_{n+1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_n+\\ +q_3^{1,\,n+1}(\delta a_1^{1'2'}+\delta a_1^{2'2})+q_3^{2,\,n+1}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_1+\delta a_2^{12'}+\delta a_2^{2'3'}+\right.\\ \left.+\delta a_2^{3'4}\right]+\cdots+q_3^{n,\,n+1}\left[\left(\frac{\partial\alpha_{n,\,n-1}}{\partial l_p}\delta l_p\right)_{n-1}+\delta a_n^{n-1,\,n'}+\delta a_n^{n',\,(n+1)'}+\right.\\ \left.+\delta a_n^{(n+1)',\,n+1}\right]+w_\lambda=0.\end{array}\right\} \quad (4)$$

Выражения для величин p, q и частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial l}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial l}$ можно найти в работе [3].

При вычислении в уравнениях (3) и (4) коэффициентов при поправках горизонтальных углов и зенитных расстояний мы должны принять

$$\varphi_i=\lambda_i=0,\ \alpha_{i,\,i+1}=0,\ \alpha_{i+1,\,i}=180^\circ,\ z_{ik}=90^\circ.$$

Тогда получим условное уравнение астрономической широты

$$\delta z_{12} + \delta z_{21} + \delta z_{23} + \delta z_{32} + \cdots + \delta z_{n,\,n+1} + \delta z_{n+1,n} + w_\varphi = 0, \tag{5}$$

условное уравнение астрономической долготы

$$\operatorname{ctg} a \delta z_{12} - \operatorname{ctg} a \delta z_{21} - \operatorname{cosec} a \delta z_{12'} + \operatorname{cosec} a \delta z_{22'} + \operatorname{ctg} a \delta z_{23} - \operatorname{ctg} a \delta z_{32} -$$
$$- \operatorname{cosec} a \delta z_{23'} + \operatorname{cosec} a \delta z_{33'} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \operatorname{ctg} a \delta z_{n,\,n+1} - \operatorname{ctg} a \delta z_{n+1,\,n} - \operatorname{cosec} a \delta z_{n,\,(n+1)'} + \operatorname{cosec} a \delta z_{n+1,\,(n+1)'} +$$
$$+ w_\lambda = 0. \tag{6}$$

Весовая функция (1) и уравнения (2), (5), (6), как видим, содержат только поправки зенитных расстояний. Условные уравнения фигур, базисов и азимутов будут содержать только поправки горизонтальных углов. Поэтому вертикальный сдвиг триангуляционного ряда (то есть сдвиг точки $n+1$ в направлении, перпендикулярном плоскости ряда) не будет зависеть от ошибок горизонтальных углов, и при вычислении обратного веса абсциссы точки $n+1$ мы можем не принимать во внимание условия фигур, базисов и азимутов, независимо от того, уравнивался ряд за эти условия или нет.

Наоборот, для расчета продольного, поперечного сдвига ряда и других его горизонтальных элементов останутся справедливыми (при сделанных в начале статьи предположениях) известные формулы, выведенные для плоской триангуляции.

Обозначив через a_i коэффициенты при поправках в условном уравнении угла γ с номером i $(i = 1, 2, 3, \ldots 2n-1)$, а через φ и λ — коэффициенты при поправках в условных уравнениях соответственно широты и долготы, получим следующие выражения для коэффициентов нормальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
[a_i a_i] = 4 \operatorname{cosec}^2 a + 8 \operatorname{ctg}^2 a = 8, \\
[a_i a_{i+1}] = -4 \operatorname{ctg} a \operatorname{cosec} a = -\dfrac{8}{3}, \\
[a_i a_{i+2}] = [a_i a_{i+3}] = \cdots = 0, \\
[a_i \varphi] = \operatorname{cosec} a = \dfrac{2}{\sqrt{3}},
\end{array}\right\} i = 1, 2, 3, \ldots 2n-1, \\
[a_i \lambda] = \begin{cases} A, & i = 1 \\ -B, & i = 2, 4, 6, \ldots 2n-2, \\ +B, & i = 3, 5, 7, \ldots 2n-1, \end{cases}
\end{array}\right\} \tag{7}$$

$$A = 3 \operatorname{ctg} a \operatorname{cosec} a = 2, \quad A = 3 \operatorname{ctg} a \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{10}{3}.$$

Пусть f — коэффициенты при поправках δz в выражении весовой функции (1). Свободные члены нормальных уравнений и величина $[ff]$ будут иметь следующий вид:

$$[a_1 f] = -ns \operatorname{cosec} a, \qquad [a_5 f] = -(n-2) s \operatorname{cosec} a,$$
$$[a_2 f] = -(n-1) s \operatorname{cosec} a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[a_3 f] = -(n-1) s \operatorname{cosec} a, \quad [a_{2n-2} f] = -s \operatorname{cosec} a,$$

$$[a_4 f] = -(n-2) s \operatorname{cosec} a, \quad [a_{2n-1} f] = -s \operatorname{cosec} a,$$

$$[\varphi f] = -n^2 s, \quad [\lambda f] = -ns \operatorname{ctg} a, \quad [ff] = \frac{2n^3+n}{3} s^2.$$

Чтобы получить выражение обратного веса $\frac{1}{P_H}$ вертикального сдвига точки $n+1$ в функции числа n промежуточных сторон, были решены схемы Гаусса при $n=2$, 4, 6, 8, 12, 20 и результаты представлены интерполяционной формулой

$$\frac{1}{s^2 P} = an^2 + bn^3.$$

Решение выполнялось с учетом и без учета условий астрономических широт и долгот. В первом случае было получено

n	2	4	6	8	12	20
$\frac{1}{s^2 P}$	1,582	9,018	26,67	58,54	180,98	778,46,

откуда с достаточной точностью.

$$\frac{1}{P_H} = (0{,}238\, n^2 + 0{,}085\, n^3)\, s^2.$$

Пусть m_z — средняя квадратическая ошибка измеренного зенитного расстояния, $L = sn$ — длина диагонали ряда, тогда средняя ошибка геодезической высоты H конечной точки ряда (вертикальный сдвиг ряда) выразится формулой

$$m_H = L \frac{m''_z}{\rho''} \sqrt{0{,}238 + 0{,}085\, n}. \qquad (8)$$

Во втором случае, когда условные уравнения широт и долгот не принимались во внимание, было найдено

n	2	4	6	8	12	20
$\frac{1}{s^2 P}$	4,310	27,08	83,29	191,96	622,73,	2793,56,

откуда

$$\frac{1}{P_H} = (0{,}336 n^2 + 0{,}332 n^3) s^2,$$

$$m_H = L \frac{m''_z}{\rho''} \sqrt{0{,}336 + 0{,}332\, n}. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) не учитывают ошибок исходных данных, то есть ошибок астрономических широт и долгот в конечных точках ряда.

Ниже в табличке помещены для наглядности и сравнения значения вертикального сдвига m_H ряда, а также значения продольного m_L и поперечного m_q сдвигов, вычисленные при различных значениях L и n. В первой строке находятся значения m_H полученные по формуле

$$m_H = \frac{m''_z}{\rho''}\sqrt{[ff]} = \frac{m''_z}{\rho''} L \sqrt{\frac{2n^2+1}{3n}},$$

которая соответствует передаче высоты по n сторонам диагонали ряда с использованием неуравненных зенитных расстояний. Значения m_H во второй строке вычислены по формуле (9), то есть для ряда, уравненного за условия углов γ. Третья строка учитывает дополнительно условные уравнения широты и долготы (формула (8)). Наконец, в последних двух строках помещены значения среднего продольного и поперечного сдвигов, вычисленные по формулам [4]:

$$m_L^2 = \frac{L^2}{2}\left[\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{2n^2-3n+10}{9n}\frac{m''^2}{\rho''^2}\right],$$

$$m_q = \frac{L}{\rho''\sqrt{2}}\sqrt{m_\alpha^2 + \frac{n^2+2n+12}{15n}m''^2}, \quad (10)$$

где m — средняя квадратическая ошибка измеренного горизонтального угла.

Формулы (10) выведены для плоского ряда равносторонних треугольников, уравненного по углам за условия фигур, базисов и азимутов.

В скобки в таблице заключены значения m_L и m_q, вычисленные без учета ошибок исходных данных, то есть при $\frac{m_b}{b}=0$ и $m_\alpha=0$. При выполнении подсчетов принято $m_z=m=\pm 1''$, $m_\alpha=\pm 0'',7$, $\frac{m_b}{b}=1/400\,000$.

Продольный, поперечный и вертикальный сдвиги триангуляционного ряда

	$L=200$ *км* $n-6$ $s\approx 33$ *км*	$L=100$ *км* $n=5$ $s=20$ *км*	$L=100$ *км* $n=10$ $s=10$ *км*	$L=60$ *км* $n=4$ $s=15$ *км*	$L=60$ *км* $n=6$ $s=10$ *км*
m_H	±1,95 *м*	±0,89 *м*	±1,26 *м*	±0,48 *м*	±0,59 *м*
$m_H(\gamma)$	1,49	0,68	0,93	0,38	0,44
$m_H(\gamma, \varphi, \lambda)$	0,84	0,40	0,50	0,22	0,25
m_L	0,82 (0,74)	0,38 (0,34)	0,51 (0,49)	0,21 (0,19)	0,25 (0,22)
m_q	0,72 (0,55)	0,36 (0,27)	0,40 (0,30)	0,21 (0,16)	0,22 (0,17)

Просмотрев приведенную таблицу, можно прийти к выводу, что использование точных астрономических определений широты и долготы в конечных точках ряда уменьшает его вертикальный сдвиг в 1,5—2 раза. При одинаковой точности измерений зенитных расстояний и горизонтальных углов продольный, поперечный и вертикальный сдвиги примерно одинаковы.

Численные значения вертикальных сдвигов позволяют говорить о том, что, если бы мы могли освободиться от влияния рефракции и получать из измерений зенитные расстояния с ошибкой порядка $\pm 1''$, то передача на значительные расстояния геодезических высот по вертикальным и горизонтальным углам осуществлялась бы с точностью такого же порядка, как точность передачи геоидальных высот астрономо-гравиметрическим нивелированием (при расстояниях между астропунктами порядка 60—100 *км*).

Обратимся теперь к приближенной оценке точности передачи вдоль ряда астрономических координат. Будем рассматривать средние квадратические ошибки направления отвесной линии в двух вертикальных плоскостях — в плоскости диагонали ряда (m_{ψ_l}) и в плоскости, перпендикулярной к диагонали (m_{ψ_q}). Величины этих ошибок не должны зависеть от направления ряда, получить их выражения нетрудно, а в то же время они дадут достаточно ясное представление о точности астрономических координат φ и λ, так как $m_\varphi = m_{\psi_l}$, $m_\lambda = m_{\psi_q} \sec\varphi$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = 180°$, и $m_\varphi = m_{\psi_q}$, $m_\lambda = m_{\psi_l} \sec\varphi$ при $\alpha = 90°$ и $\alpha = 270°$.

Назовем m_{ψ_l} — продольной, а m_{ψ_q} — поперечной ошибкой направления отвеса.

При сделанных выше предположениях точность передачи астрономических координат не будет зависеть от ошибок горизонтальных углов и от наличия дополнительных базисов и астрономических азимутов. Поэтому условия фигур, базисов и азимутов можно не рассматривать. Обозначим через ψ_l и ψ_q соответственно величины продольного и поперечного отклонений отвеса в конечной точке ряда, обусловленных ошибками измерений при передаче астрономических координат по диагонали $1 - (n+1)$. Тогда из выражения (3) при $\alpha = 0$ или из выражения (4) при $\alpha = 90°$ получим

$$\psi_l = \delta z_{12} + \delta z_{21} + \delta z_{23} + \delta z_{32} + \cdots + \delta z_{n,\,n+1} + \delta z_{n+1,\,n}. \tag{11}$$

Аналогично, из выражения (3) при $\alpha = 270°$ или из выражения (4) при $\alpha = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}\psi_q = {} & \operatorname{ctg} a\,\delta z_{12} - \operatorname{ctg} a\,\delta z_{21} - \operatorname{cosec} a\,\delta z_{12'} + \operatorname{cosec} a\,\delta z_{22'} + \\ & + \operatorname{ctg} a\,\delta z_{23} - \operatorname{ctg} a\,\delta z_{32} - \operatorname{cosec} a\,\delta z_{23'} + \operatorname{cosec} a\,\delta z_{33'} + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \operatorname{ctg} a\,\delta z_{n,\,n+1} - \operatorname{ctg} a\,\delta z_{n+1,\,n} - \operatorname{cosec} a\,\delta z_{n,\,(n+1)'} + \operatorname{cosec} a\,\delta z_{n+1,\,(n+1)'}.\end{aligned} \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) есть весовые функции для продольной и поперечной ошибок направления отвеса в точке $n+1$.

Далее находим

$$[ff]_{\psi_l} = 2n, \quad [ff]_{\psi_q} = 2n(\operatorname{ctg}^2 a + \operatorname{cosec}^2 a) = \frac{10}{3} n.$$

Пусть ряд уравнивается за условия углов γ. Тогда коэффициенты и свободные члены нормальных уравнений будут равны

$$[a_i a_i] = 8, \quad [a_i a_{i+1}] = -\frac{8}{3}, \quad [a_i a_{i+2}] = [a_i a_{i+3}] = \cdots = 0,$$

$$[a_i f_{\psi_l}] = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$[a_i f_{\psi_q}] = \begin{cases} 2, & i = 1, \\ -\frac{10}{3}, & i = 2, 4, 6, \dots 2n-2, \\ +\frac{10}{3}, & i = 3, 5, 7, \dots 2n-1. \end{cases}$$

При уравнивании ряда за условия углов γ, условия астрономических широт и долгот наиболее слабым местом будет середина ряда. Весовые функции для продольной и поперечной ошибки отклонения отвеса для точки с номером $\frac{n}{2}+1$ (n — четное) запишутся так:

$$\psi_l = \delta z_{12} + \delta z_{21} + \delta z_{23} + \delta z_{32} + \dots + \delta z_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1} + \delta z_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \psi_q = {} & \operatorname{ctg} a \delta z_{12} - \operatorname{ctg} a \delta z_{21} - \operatorname{cosec} a \delta z_{12'} + \operatorname{cosec} a \delta z_{22'} + \\ & + \operatorname{ctg} a \delta z_{23} - \operatorname{ctg} a \delta z_{32} - \operatorname{cosec} a \delta z_{23'} + \operatorname{cosec} a \delta z_{33'} + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \operatorname{ctg} a \delta z_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1} - \operatorname{ctg} a \delta z_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}} - \operatorname{cosec} a \delta z_{\frac{n}{2},\left(\frac{n}{2}+1\right)'} + \\ & + \operatorname{cosec} a \delta z_{\frac{n}{2}+1,\left(\frac{n}{2}+1\right)'}. \end{aligned} \tag{14}$$

Условные уравнения астрономических широт и долгот сохранят вид (5), (6) (при $\alpha_{12}=0$), поэтому коэффициенты нормальных уравнений определятся формулами (7), а для свободных членов и величин $[ff]_{\psi_l}$, $[ff]_{\psi_q}$ получим

$$[a_i f_{\psi_l}] = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}, & i = 1, 2, 3, \dots n \\ 0, & i = n+1, n+2, \dots 2n-1, \end{cases}$$

$$[\varphi f_{\psi_l}] = n, \ [\lambda f_{\psi_l}] = 0, \ [ff]_{\psi_l} = n,$$

$$[a_i f_{\psi_q}] = \begin{cases} +2, & i = 1, \\ -\frac{10}{3}, & i = 2, 4, 6, \dots n-2, \\ +\frac{10}{3}, & i = 3, 5, 7, \dots, n-1, \\ -2, & i = n, \\ +\frac{4}{3}, & i = n+1, \\ 0, & i \geqslant n+2, \end{cases}$$

$$[\varphi f_{\psi_q}] = 0, \ [\lambda f_{\psi_q}] = \frac{5}{3} n, \ [ff]_{\psi_q} = \frac{5}{3} n.$$

Решение систем нормальных уравнений при $n=2$, 4, 6, 8, 12, 20 с последующим представлением результатов интерполяционными формулами вида

$$\frac{1}{P}=a+bn$$

позволило получить для продольной m_{ψ_l} и поперечной m_{ψ_q} средних квадратических ошибок отклонения от веса следующие выражения как функции числа n сторон в диагонали ряда:

а) ряд уравнен за условия углов γ; ошибка в конечной точке ряда

$$m_{\psi_l}=m_z\sqrt{n+1{,}11},$$

$$m_{\psi_q}=1{,}29\,m_z\sqrt{n+0{,}63}, \qquad (15)$$

б) ряд уравнен за условия углов γ, условия астрономических широт и долгот; ошибка в точке $\frac{n}{2}+1$ диагонали ряда (n — четное)

$$m_{\psi_l}=0{,}503\,m_z\sqrt{n+1{,}84},$$

$$m_{\psi_q}=0{,}646\,m_z\sqrt{n+1{,}33}. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) не учитывают ошибок исходных данных, m_z — по-прежнему, средняя квадратическая ошибка измеренных зенитных расстояний при предположении, что последние освобождены от влияния вертикальной рефракции.

Заметим, что все приведенные выше окончательные формулы не изменятся, если их выводить при произвольно заданном значении азимута α диагонали ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. Е. Условные уравнения в сети пространственной триангуляции. Республ. межведомств. научно-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 7. Изд-во Львовского ун-та, 1968.
2. Филиппов А. Е. О координатных условных уравнениях в сети пространственной триангуляции. Республ. межведомств. научно-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 8. Изд-во Львов. ун-та, 1969.
3. Филиппов А. Е. Условные уравнения широты, долготы и азимута в сети пространственной триангуляции. Республ. межведомств. научно-техн. сб. «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», вып. 6. Изд-во Львовского ун-та, 1967.
4. Справочник геодезиста, стр. 370. «Недра», 1966.

Работа поступила
25 ноября 1968 г.