МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1970 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 11

КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.23

А. С. ЛИСИЧАНСКИЙ

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННОГО КЛАССА КОНФОРМНЫХ АЗИМУТАЛЬНО-КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Следуя идеям П. Л. Чебышева в области теории картографических проекций, мы в работе [2] показали возможность получения обобщенного класса конформных азимутально-цилиндрических проекций, относительно которых известные классические азимутальная (стереографическая) и цилиндрическая (меркаторская) проекции являются крайними частными случаями. Такой обобщенный класс был образован как производная азимутальной и цилиндрической проекций путем построения ее уравнений в виде линейных функций соответствующих уравнений исходных проекций.

Обобщенный класс азимутально-цилиндрических конформных проекций имеет существенное преимущество перед исходными, так как посредством надлежащего выбора произвольных постоянных его изоколам можно придать эллипсовидную форму любой степени вытянутости — от концентрических окружностей (азимутальная проекция) до параллельных прямых (цилиндрическая проекция). Тем самым достигается возможность достаточно хорошего приспособления принимаемого варианта проекции к очертаниям изображаемой области, если она приблизительно вписывается в некоторый эллипс. Такие области, по данным В. В. Каврайского [1], часто встречаются в практике составления географических карт.

Ниже излагается теория еще одного обобщенного класса конформных проекций — азимутально-конических. Он назван нами так потому, что образован аналогичным путем, то есть как производный, но уже из азимутальной и конической проекций, которые тем самым становятся частными случаями обобщенного класса. При этом также приобретается новое качество проекции. А именно — изоколы ее могут иметь вид изогнутых овалов любой степени вытянутости вдоль заданного малого круга земного шара, проведенного через центральную точку области в направлении ее вытянутости и называемого в дальнейшем **малым осевым кругом**. Области, своими очертаниями достаточно хорошо вписываемые в форму изогнутых овалов, пожалуй, еще чаще встречаются в картографической практике, чем вписываемые в эллипс.

Пусть уравнения обобщенного класса конформных азимутально-конических проекций имеют вид

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2,$$
$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2, \tag{1}$$

где κ_1 и κ_2 — произвольные постоянные, причем

$$k_1 + k_2 = 1. \tag{2}$$

Примем поверхность земли за шаровую. Если дополнительно условиться, что земной эллипсоид был предварительно конформно отображен на шар, то в конечном итоге уравнения (1) будут соответствовать конформной проекции эллипсоида на плоскости (так называемая двойная проекция). Без ущерба для общности решения поставленной задачи в дальнейших теоретических выкладках радиус шара R примем равным единице. Практически же его значение целесообразно взять таким, чтобы масштаб длин $m_ш$, сопутствующий отображению эллипсоида на шар, в некоторой центральной точке заданной области равнялся единице.

Для масштаба $m_ш$ имеем формулу

$$m_ш = \frac{r'}{r} = \frac{R \cos \varphi'}{r}, \tag{3}$$

где r — радиус параллели эллипсоида на широте φ, а r' — радиус параллели шара на соответствующей широте φ'.

Поэтому для определения радиуса R получаем формулу

$$R = \left(\frac{r}{\cos \varphi'}\right)_0, \tag{4}$$

где индекс 0 за скобками указывает, что величины r и φ' берутся для широты $\varphi = \varphi_0$ центральной точки области.

Положение точек на шаре будем определять в косой системе «географических» координат, где

u — широта, исчисляемая относительно экватора косой системы, то есть от большого круга, параллельного осевому малому кругу области;

v — долгота, исчисляемая от осевого меридиана косой системы, в роли которого принят большой круг, проходящий через центральную точку области и перпендикулярный осевому малому кругу.

Вычисление координат u и v может быть осуществлено с помощью известных формул по найденным предварительно широтам φ' и долготам λ.

Приведем теперь известные в математической картографии основные формулы исходных проекций.

Уравнения стереографической проекции, горизонтальной относительно системы (u, v), имеют вид:

$$x = \frac{C_1 S}{V}, \quad y = \frac{C_1 T}{V}, \tag{5}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если u_0 — широта центральной точки области, то остальные величины, содержащиеся в формулах (5), выражаются следующими равенствами:

$$\begin{gathered} S = \beta \sin u - \alpha \cos u \cos v, \\ T = \cos u \sin v, \\ V = 1 + \alpha \sin u + \beta \cos u \cos v, \\ \alpha = \sin u_0, \ \beta = \cos u_0. \end{gathered} \tag{6}$$

Масштаб длин в произвольной точке этой проекции, как двойной проекции эллипсоида на плоскости, выражается формулой

$$m_1 = \frac{m_ш C_1 \sqrt{g_1}}{\cos u}, \tag{7}$$

где

$$g_1 = (x_{1.v})^2 + (y_{1.v})^2, \tag{8}$$

$$(x_{1.v}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{V}\right) = \frac{VS' - V'S}{V^2}, \quad (y_{1.v}) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{T}{V}\right) = \frac{VT' - V'T}{V^2}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\partial S}{\partial v} = \alpha \cos u \sin v, \\ T' &= \frac{\partial T}{\partial v} = \cos u \cos v, \\ V' &= \frac{\partial V}{\partial v} = -\beta \cos u \sin v. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения конической конформной проекции, прямой относительно системы (u, v), имеют вид

$$x_2 = \rho_0 - \frac{C_2}{\omega^\alpha} \cos \alpha v, \quad y_2 = \frac{C_2}{\omega^\alpha} \sin \alpha v, \tag{11}$$

где C_2 — прозвольная постоянная, а

$$\omega = \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{u}{2}\right)\sqrt{\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}}, \tag{12}$$

$$\rho_0 = \frac{C_2}{\omega_0^\alpha}.$$

Здесь индекс 0 при ω указывает на то, что эта величина берется для широты u_0.

Масштаб длин в произвольной точке этой проекции выражается формулой

$$m_2 = \frac{m_ш C_2 \sqrt{g_2}}{\cos u}, \tag{13}$$

где

$$\sqrt{g_2} = \frac{\alpha}{\omega^\alpha}. \tag{14}$$

Уравнения (1) рассматриваемого обобщенного класса азимутально-конических проекций мы теперь можем считать известными, так как известны выражения содержащихся в них переменных величин x_1, y_1, x_2, y_2. Поэтому дальнейшая задача построения теории этого класса проекций сводится к выводу формул масштаба длин и содержащихся в уравнениях произвольных постоянных.

Рассмотрим эти вопросы.

Масштаб длин любой двойной конформной проекции эллипсоида на плоскости выражается так:

$$m = \frac{m_ш \sqrt{G}}{\cos u}, \tag{15}$$

где коэффициент G первой квадратичной формы, который в нашем случае должен быть определен из системы уравнений (1) по формуле

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2. \tag{16}$$

Так как в соответствии с этой системой

$$\frac{\partial x}{\partial v}=k_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+k_2\frac{\partial x_2}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v}=k_1\frac{\partial y_1}{\partial v}+k_2\frac{\partial y_2}{\partial v},$$

то

$$G=k_1^2G_1+2k_1k_2F_v+k_2^2G_2, \tag{17}$$

где G_1 и G_2 — коэффициенты первой квадратичной формы, определяемые аналогично формуле (16), но для азимутальной и конической проекций соответственно, а коэффициент F_v определяется таким равенством:

$$F_v=\frac{\partial x_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial v}. \tag{18}$$

С помощью систем (5) и (11) получим для этих коэффициентов следующие выражения:

$$G_1=C_1^2g_1,\ G_2=C_2^2g_2,\ F_v=C_1C_2f_v, \tag{19}$$

где

$$f_v=\frac{\alpha}{\omega^\alpha}[(x_{1.v})\sin\alpha v+(y_{1.v})\cos\alpha v]. \tag{20}$$

Таким образом, все переменные величины, необходимые для вычисления масштаба, по формуле (15) найдены.

Перейдем к вопросу определения произвольных постоянных.

Заметим сначала, что рассматриваемый класс проекций характеризуется, как мы видели, наличием четырех произвольных постоянных: α, C_1, C_2, и k_1 (так как по условию $k_2=1-k_1$). Каждая из них оказывает определенное влияние на форму изокол и распределение искажений.

Произвольная постоянная α определяет собой степень изогнутости овальных изокол. Так как $\alpha=\sin u_0$, то эта изогнутость целиком зависит от принятой кривизны малого осевого круга. Положение его легко найти графическим путем по имеющейся карте. Числовое значение широты u_0 центральной точки области можно вычислить по хорошо известным в математической картографии методам.

Произвольные постоянные C_1, C_2, k_1 определяют степень вытянутости изокол и распределение искажений. Для их вычисления достаточно задаться в пределах области тремя точками, именуемыми в дальнейшем *характерными точками*, и поставить условие, чтобы через них проходила изокола масштаба, равного единице. Первую из них следует взять на осевом меридиане косой системы, на его отрезке, расположенном в вогнутой стороне осевого малого круга; вторую — на осевом малом круге, третью — тоже на осевом меридиане, но на отрезке его, расположенном в выпуклой стороне малого осевого круга. Все три характерные точки предпочтительно брать на расстоянии от центральной точки области, равном 0,7—0,8 расстояния до точек, взятых соответственно по указанным направлениям на обобщенном до формы изогнутого овала контура области. При соблюдении данной рекомендации достигается достаточно равномерное распределение искажений в пределах всей области.

Изложенный метод определения произвольных постоянных C_1, C_2 и k_1 приводит к решению системы уравнений с тремя неизвестными второй степени. Эти уравнения легко получить с помощью формулы (15), они имеют такой общий вид:

$$(G)_1=\left(\frac{\cos u}{m_ш}\right)_1^2,\ (G)_2=\left(\frac{\cos u}{m_ш}\right)_2^2,\ (G)_3=\left(\frac{\cos u}{m_ш}\right)_3^2, \tag{21}$$

где нижние индексы за скобками указывают номер характерной точки, для которой необходимо находить содержащиеся в них переменные величины.

Решение системы (21) относительно C_1, C_2 и k_1 связано с известными трудностями. Мы можем существенно упростить вычисление искомых постоянных, если учесть, что выбор положения характерных точек, как и сам «обобщенный до изогнутого овала контур области», страдает известным произволом.

Так, например, с помощью формул (7) и (13) постоянные C_1 и C_2 можно вычислить независимо от постоянной k_1. Для этого надлежит масштабы азимутальной и конической проекций в первой (или в третьей) характерной точке приравнять к единице. Тогда

$$C_1=\left(\frac{\cos u}{m_ш\sqrt{g_1}}\right)_1,\quad C_2=\left(\frac{\cos u}{m_ш\sqrt{g_2}}\right)_1. \tag{22}$$

После этого на основе формул (15) и (17) можем составить уравнение для определения постоянной k_1, для чего поставим условие, чтобы масштаб азимутально-конической проекции во второй характерной точке равнялся единице. Это уравнение будет следующим:

$$k_1^2(G_1)_2+2k_1k_2(F_v)_2+k_2^2(G_2)_2=\left(\frac{\cos u}{m_ш}\right)_2^2. \tag{23}$$

Здесь нижний индекс 2 за скобками указывает, что заключенные в скобках переменные величины должны быть вычислены для второй характерной точки. Значения постоянных C_1 и C_2, необходимые для вычисления коэффициентов $(C_1)_2$, $(F_v)_2$, $(G_2)_2$ этого уравнения по формулам (19), примем те, которые будут получены из (22).

Выражая k_2 через k_1 по соотношению (2), уравнение (23) мы приведем к квадратному относительно одной неизвестной k_1, и тогда последняя может быть выражена известной формулой решения квадратного уравнения. Однако делать это не целесообразно, так как методом интерполирования и последовательных приближений k_1 может быть вычислено из уравнения (23) проще. При этом первое приближенное значение $k_1=\overline{k}_1$ с недостатком можно взять равным округленному до 0,1 отношению ширины изображаемой области к ее длине, а для $k_1=\dot{k}_1$ с избытком на 0,1—0,2 больше. Практически окончательные значения k_1 и k_2 достаточно вычислить не более как до четырех—пяти десятичных знаков, но обязательно соблюдая соотношение (2).

Разумеется, что найденные таким вторым путем числовые значения C_1, C_2 и k_1 не будут теми же, что и полученные из решения системы (21), но отличаться от них будут несущественно. Изокола масштаба, равного единице, в этом случае не пройдет точно через намеченные предварительно первую и третью характерные точки, но будет достаточно близка к ним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каврайский В. В. Таблицы проекции Гаусса-Крюгера для широкой полосы и ее применение к вычислению равноугольных проекций общего типа, приспособляемых к очертанию страны. Труды ЦНИИГАиК, вып. 16, М., 1937.

2. Лисичанский А. С. Производные равноугольные проекции. Научные записки ЛПИ, вып. 85, серия геодезическая № 9, Львов, 1962.

Работа поступила
8 декабря 1968 года.